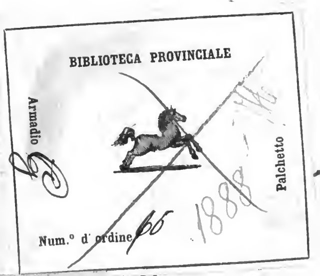
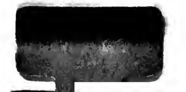



FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine



NOUVEAUX

PROBLÈMES

DE PHYSIQUE.



AVIS.

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

L. Hachette

IMPRIMERIE DE GUIRAUDET ET CH. JOUAUST,
315, Rue Saint-Honoré.

NOUVEAUX

PROBLÈMES

DE PHYSIQUE

SUIVIS

DES QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL,

DEPUIS 1805 JUSQU'A CE JOUR,

DANS LES CLASSES DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE;

PAR M. E. BARY,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU COLLÉGE ROYAL DE CHARLEMAGNE, ET RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



Paris,

CHEZ L. HACHETTE,

LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,

RUE PIERRE-SARRAZIN, 12.

1838

A M. E. CHEVREUL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR DE CHIMIE AU MUSÉUM D'HISTOIRE NATURELLE,

DIRECTEUR DES TEINTURES
A LA MANUFACTURE ROYALE DES GOBELINS,

EX-PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU COLLÉGE ROYAL DE CHARLEMAGNE.

HOMMAGE

DE RECONNAISSANCE ET DE RESPECT.

PRÉFACE.

La résolution des problèmes de mathématiques ou de physique sert en même temps à constater le savoir des élèves et à développer leur intelligence. Les recueils de problèmes sont donc d'un grand secours, soit pour assurer le succès de l'enseignement, soit pour en étendre les limites. Ce double avantage n'a pas été méconnu par les géomètres; car ils ont publié de nombreux recueils de problèmes sur les diverses branches des mathématiques. La physique au contraire ne possède que fort peu d'ouvrages de ce genre; ce qui vient sans doute de ce qu'elle a été cultivée avec moins d'ardeur que les mathématiques, et de ce qu'elle a été long-temps envisagée comme une science d'éclat et d'amusement plutôt que de recherches et d'utilité. Aujourd'hui que cette étude est mieux dirigée et mieux appréciée, il importe d'offrir à ceux qui s'y livrent de nouvelles ressources, et de leur montrer les nombreuses applications qu'on peut faire des théories physiques. Tel est le but que je voudrais atteindre en publiant ces *Problèmes*.

Le plan que je me suis tracé est exposé suffi-

samment soit dans la *Table*, soit dans les *Notions préliminaires*. En résumé, je résous des problèmes dans la première partie de l'ouvrage, et j'en propose dans la seconde. Cette seconde partie est suivie d'un complément qui renferme les solutions de la plupart des problèmes précédemment énoncés. J'ai presque toujours omis les raisonnements ou les calculs nécessaires pour arriver à ces solutions. Cette tâche appartient au lecteur, et mes solutions ne doivent lui servir qu'à vérifier les siennes. Lorsque les formules qu'il faut obtenir sont susceptibles de quelque discussion, je signale les points principaux sur lesquels elle doit rouler. Ces indications ne sont pas superflues; car j'ai observé que ceux qui commencent à résoudre des questions physico-mathématiques se livrent souvent à des discussions insignifiantes, faute d'apercevoir les cas particuliers qui offrent un véritable intérêt.

On lira aussi quelques problèmes (et ce sont généralement les plus faciles) dont je n'ai pas donné les solutions. Les étudiants qui ne les trouveront pas eux-mêmes pourront consulter leurs professeurs. Ceux de mes collègues qui voudront bien mettre mon ouvrage entre les mains de leurs élèves me reprocheront peut-être de n'avoir pas assez multiplié les problèmes réduits ainsi à de simples énoncés. Ce sont en effet ceux-là qu'ils

proposeraient le plus volontiers dans leurs classes, parce que chaque élève n'aurait alors d'autre secours que sa propre sagacité. Mais cet inconvénient me paraît fort léger ; car il ne sera pas difficile aux professeurs de modifier mes énoncés, en changeant soit les inconnues, soit des circonstances accessoires, de manière à dérouter les élèves qui auraient mon livre, et à leur rendre mes solutions inutiles (1).

Peut-être aussi me reprochera-t-on de n'avoir fait graver que deux planches, et d'avoir décrit

(1) Par exemple les *problèmes* 1 et 80 *sur la chaleur* suggéreraient à plus d'un professeur des énoncés tels que ceux-ci :

Le coefficient de la dilatation absolue du mercure est $\frac{1}{9958}$, lorsqu'on part du zéro du thermomètre de Farenheit, et qu'on choisit pour unité de température un degré de ce thermomètre. Déduire de ce nombre le coefficient de la même dilatation, pris à partir du zéro de l'échelle centésimale (ou octogésimale), le degré centésimal (ou octogésimal) devenant l'unité de température.

— On fait passer 50g de vapeur d'alcool à 78°,4 dans 2490g d'alcool à 4°, la température ambiante étant de 8°, et l'on obtient 2540g d'alcool liquide à 12°. On sait d'ailleurs que 1g d'alcool exige, pour s'échauffer de 1°, les 0,622 d'une *unité de chaleur*, c'est-à-dire de la quantité de chaleur qui élèverait 1g d'eau de 1°. Trouver d'après ces données le nombre d'unités de chaleur que 1g d'alcool absorbe pour sa vaporisation.

souvent des appareils de physique ou des constructions géométriques sans éclaircir mon texte par des figures. Je répondrai que cette rareté de dessins est de ma part tout à fait systématique. D'abord la plupart des questions de physique peuvent être énoncées avec des détails assez précis pour qu'un dessin ne soit pas nécessaire au lecteur attentif. Ensuite les jeunes gens doivent s'habituer de bonne heure à saisir les descriptions qui ne parlent qu'aux yeux de l'esprit, sous peine de ne rien comprendre plus tard aux mémoires et aux journaux scientifiques, qui ne sont presque jamais accompagnés de dessins. Il est bon de lire un ouvrage de science la plume à la main, et dès qu'on ne se représente pas nettement une construction, il faut la tracer soi-même sur le papier. J'ai voulu, sur ce point comme sur tous les autres, laisser quelque chose à faire à l'intelligence du lecteur.

Les problèmes que j'ai réunis dans cet ouvrage tirent pour la plupart leur origine de l'enseignement dont je suis chargé depuis quatorze ans dans un des colléges royaux de Paris. Je me suis constamment efforcé de varier les questions que je proposais dans mes cours, et d'imaginer des énoncés nouveaux qui pussent intéresser mes élèves tout en les exerçant. Outre ces problèmes, il en est d'autres plus difficiles que j'ai déjà pu-

bliés dans des recueils périodiques, et que je reproduis ici avec tous les développements qu'exige un livre élémentaire. J'ai fait aussi quelques emprunts à des ouvrages rares ou anciens, trop peu connus aujourd'hui, et que j'ai soin de citer dans l'occasion, afin que chacun puisse remonter aux sources où j'ai puisé moi-même. Enfin plusieurs de mes collègues, dont on aimera à trouver les noms dans ce recueil, m'ont permis de l'enrichir de quelques problèmes inédits qui leur appartiennent.

Dans l'*Appendice* qui termine le volume, je donne par ordre chronologique les énoncés des questions qui ont été proposées au Concours général en physique et en chimie depuis l'année 1805, c'est-à-dire depuis l'organisation des *lycées* (appelés maintenant *colléges royaux*) (1). Je n'ai pas cru devoir joindre les solutions aux énoncés. Car les questions du Concours se composent de *théories* et de *problèmes*. Or, en exposant ces *théories*, qui se trouvent déjà dans tous les traités de physique ou de chimie, j'aurais fait moi-même une espèce de traité incomplet et mal ordonné; et en résolvant ces *problèmes*, j'aurais enlevé à mes collègues

(1) La première distribution des prix du Concours eut lieu, pour les quatre lycées de Paris, le 29 thermidor an 13 (17 août 1805).

des sujets de composition qu'ils proposent fréquemment et qui sont les meilleurs pour préparer leurs élèves aux luttes annuelles de la Sorbonne. Je me suis donc borné aux énoncés des questions, en les accompagnant toutefois de notes, les unes critiques ou historiques, les autres explicatives.

La publication des questions du Concours me semble utile à tous les professeurs, surtout à ceux de province, et elle est plus opportune que jamais à une époque où l'on vient d'étendre le Concours à la France entière, et où l'Université s'efforce, en excitant une heureuse émulation, d'élever partout l'enseignement à la même hauteur que dans la capitale.

TABLE.

PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER. — *Problèmes de statique.*

CHAPITRE II. — *Problèmes de dynamique.*

CHAPITRE III. — *Problèmes d'hydrostatique.*

CHAPITRE IV. — *Problèmes sur la chaleur.*

CHAPITRE V. — *Problèmes d'électricité.*

CHAPITRE VI. — *Problèmes de magnétisme et d'électro-magnétisme.*

CHAPITRE VII. — *Problèmes d'acoustique.*

CHAPITRE VIII. — *Problèmes d'optique.*

SUITE DE LA SECONDE PARTIE. — COMPLÉMENT.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE.

NOUVEAUX
PROBLÈMES
DE PHYSIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE ET SUR L'ORDRE DANS LEQUEL ILS DOIVENT ÊTRE PRÉSENTÉS.

Un problème de physique a pour objet soit l'explication d'un fait observé, soit la prévision des faits qui doivent naître d'un ensemble de circonstances données, soit la découverte des lois qui régissent un phénomène, soit l'évaluation ou la construction d'une ou de plusieurs grandeurs qui entrent dans une expérience, soit enfin l'invention d'une méthode expérimentale.

L'explication des faits devrait reposer toujours sur des principes incontestables. Cependant on ne peut quelquefois la fonder que sur des *hypothèses* plus ou moins admissibles, ce qui résulte de l'imperfection actuelle de la science. Il faut du moins que ces hypothèses soient généralement adoptées, et que les explications qu'on leur emprunte en soient déduites par des raisonnements ou des calculs rigoureux.

Pour *prévoir ce qui se passera dans des circonstances déterminées*, il est nécessaire de connaître les propriétés des corps ou des agents qui sont mis en présence, d'apprécier chacune des influences qui s'exercent à la fois, et de s'appuyer sur les faits déjà observés dans des cas analogues.

Découvrir les lois qui régissent un phénomène, c'est trouver la relation constante qui existe entre les causes et les effets. Quand ces lois peuvent se traduire en nombres, on en tire, au moyen du calcul, diverses conséquences qui, par leur accord avec l'observation, servent à vérifier les lois dont elles dérivent.

On évalue ou l'on construit une grandeur demandée en partant de lois physiques dont l'application faite à propos conduit à certaines relations de mesure ou de position entre les données et les inconnues. Dès que ces relations sont établies, la question de physique est ramenée à une question de mathématiques.

L'invention d'une méthode expérimentale exige tantôt un emploi nouveau des instruments déjà con-

nus, tantôt la construction d'appareils nouveaux. Les problèmes de cette espèce sont difficiles à résoudre. Cependant l'habitude des expériences, secondée par la réflexion, féconde l'esprit et lui suggère des idées appropriées aux investigations qu'il se propose. Il suffit souvent d'appliquer à une partie de la physique un procédé qu'on a vu employer dans une autre partie, en le modifiant d'après l'usage auquel on veut l'étendre. Les nombreuses méthodes que l'art d'expérimenter possède aujourd'hui sont autant de sources qu'il faut détourner avec adresse. On peut même dire que dans ce genre comme dans beaucoup d'autres la plupart des inventions de nos jours ne sont que des imitations habilement déguisées.

La résolution des problèmes de physique ne saurait être assujettie à des règles générales. La marche à suivre dans chaque cas varie avec la nature de la question. C'est seulement par un long exercice qu'on se familiarise avec cette sorte de recherches. L'enseignement qui est le but de notre livre sera donc tout à fait pratique : nous donnerons des exemples, et non des préceptes. Nous allons d'abord résoudre un certain nombre de problèmes, et nous en proposerons ensuite beaucoup d'autres dont la résolution sera facile pour les jeunes physiciens qui auront lu attentivement la première partie de cet ouvrage.

Nous diviserons les problèmes de physique en deux classes : la première comprendra ceux qu'on peut résoudre par les seules forces du raisonnement; la seconde renfermera ceux qu'on ne peut traiter qu'avec le secours des mathématiques. Cette seconde classe,

qui est beaucoup plus étendue que la première, sera subdivisée elle-même en plusieurs autres, suivant la branche des mathématiques à laquelle chaque problème se rattache. Ainsi l'un ne demande que des notions d'arithmétique, l'autre s'appuie sur l'algèbre, un troisième sur la géométrie..... Nous choisirons successivement dans chacune de ces classes les exemples qui nous paraîtront les plus nouveaux et les plus instructifs.

Cette classification est sans doute *artificielle*, c'est-à-dire fondée sur des conventions plutôt que sur la réalité. Car il est des questions où le raisonnement a sa part et où le calcul a la sienne; il en est d'autres où la géométrie et l'algèbre s'entremêlent et se prêtent un secours réciproque....; d'où il suit que les lignes de démarcation que nous venons de tracer doivent s'effacer quelquefois. Mais en adoptant ces divisions dans la première partie de ce recueil, nous trouvons l'avantage de graduer convenablement les difficultés, et celui de passer en revue tous les modes de solution dont les problèmes sont susceptibles. Quant aux problèmes que nous proposerons dans la seconde partie de l'ouvrage, nous les rangerons dans l'ordre *naturel*, c'est-à-dire dans l'ordre des théories physiques dont ils dépendent.

CHAPITRE PREMIER.

—

EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE RÉSOLUS SANS LE SECOURS DES MATHÉMATIQUES.

1. ***Déterminer par approximation la densité d'un corps A sans employer de poids ni de balance, sachant que cette densité est comprise entre celle de l'alcool pur (0,792) et celle de l'acide sulfurique concentré (1,84). On suppose que le contact de ces liquides n'altère point le corps A.***

Si la densité du corps A est plus grande que celle de l'eau, on formera par tâtonnement un composé d'eau et d'acide sulfurique où le corps A puisse flotter en dépassant le niveau du liquide d'une quantité à peine appréciable. La densité de A sera sensiblement égale à celle de ce composé. Car, lorsqu'un corps flottant est en équilibre, son poids est égal à celui du volume liquide qu'il déplace; et, puisque le corps est plongé presque entièrement, sa densité doit être fort peu inférieure à celle du liquide. Le problème est donc ramené à la recherche de cette dernière densité, ce qui ne demande que l'emploi d'un aréo-

mètre à poids constant, dont la graduation indique immédiatement les densités (1).

Si le corps A est moins dense que l'eau, on combinera sans peine l'eau et l'alcool dans des proportions telles que le liquide obtenu ait une densité à peu près égale à celle de A, puis on aura recours à l'aréomètre de même que dans le cas précédent.

Nous citerons comme exemple l'évaluation de la densité *moyenne* d'un flacon de verre bouché *à l'émeri* et qui renferme de l'air avec un corps solide ou liquide.

Si le corps A est altéré par l'acide sulfurique, et que la densité de A soit comprise entre 1,5 et 1, il faudra substituer à cet acide étendu une dissolution saline plus ou moins concentrée. Ainsi l'on obtiendrait la densité *moyenne* d'un œuf à l'aide d'une dissolution de sel marin affaiblie convenablement.

2. *Constater, sans le secours d'une pompe foulante à gaz, qu'il y a production de froid dans l'intérieur d'un récipient d'où s'écoule par un petit orifice un mélange de fluides élastiques dont la tension l'emporte sur la pression de l'atmosphère.*

Le récipient qu'on emploie est un grand flacon à

(1) Les aréomètres gradués ainsi ont été désignés par M. Gay-Lussac sous le nom de *densimètres*. On sait que M. Collardeau construit les *densimètres* et les *volumètres* avec une précision remarquable.

deux tubulures percé d'un orifice latéral d'environ une ligne de diamètre. Ayant fermé cet orifice avec un bouchon de liége, on applique à l'une des tubulures un bouchon que traverse un long tube de verre ouvert par en haut, terminé inférieurement par une boule et contenant un petit cylindre d'un liquide coloré; puis on ferme l'autre tubulure avec un bouchon de liége percé, dans lequel entre à vis la tige d'un robinet *à capsule*, c'est-à-dire d'un robinet dont la clef est seulement creusée. Le flacon étant ainsi clos hermétiquement, on y fait tomber par le jeu du robinet plusieurs gouttes d'éther sulfurique. On remarque en passant que le thermomètre à air s'abaisse à mesure que le liquide injecté se vaporise. Quand on croit être arrivé au terme de la saturation, on attend que l'index coloré ait repris sa position primitive. Imaginons qu'on ait obtenu cet équilibre. Si la température ambiante est de 18° à 20°, le mélange d'air et de vapeur d'éther aura une tension à peu près équivalente à une atmosphère et demie. Vient-on à déboucher tout à coup l'orifice latéral, un sifflement annonce l'écoulement simultané du gaz et de la vapeur, et l'on voit l'index descendre avec rapidité. On augmenterait beaucoup cet effet en introduisant successivement dans le flacon, à l'aide du robinet, des gouttes de plusieurs liquides très volatils, dont les vapeurs fussent sans action chimique les unes sur les autres.

3. ***Après avoir comprimé de l'air humide dans un récipient par un grand nombre de coups de pis-***

ton, si l'on ouvre tout à coup un robinet qui donne issue à l'air, ce gaz s'échappe avec un sifflement qui s'affaiblit de plus en plus. Lorsqu'on n'entend plus aucun bruit, on ferme le robinet. Si on le rouvre une demi-heure après ou plus tard, on entend de nouveau l'air sortir avec un sifflement très sensible. Le même fait peut se reproduire une seconde demi-heure après, mais avec moins d'intensité, et ainsi de suite. Expliquer ce phénomène.

Le phénomène dont il s'agit est une conséquence du froid produit par la raréfaction des gaz. L'air comprimé dans le récipient s'écoule d'abord en vertu de l'excès de son élasticité sur la pression atmosphérique. A mesure qu'il s'échappe, l'élasticité de l'air qui reste dans le récipient diminue avec sa densité, mais plus rapidement qu'elle, à cause de l'abaissement de température qui résulte de la raréfaction du gaz. L'écoulement du gaz s'arrête, et par conséquent le sifflement cesse, lorsque son élasticité, décroissant de plus en plus, est devenue égale à la pression de l'atmosphère. Mais à ce terme la densité de l'air intérieur est encore plus grande que celle de l'air ambiant. Si donc on ferme le robinet, l'air du récipient sera bientôt réchauffé par les corps qui l'environnent et reprendra l'excès d'élasticité correspondant à sa densité. En outre la vapeur aqueuse mélangée d'abord avec ce gaz, et qui avait été liquéfiée ou même congelée par le refroidissement, reprendra son état aériforme avec sa température primitive, et ajoutera son élasticité à celle du gaz.

Il suit de là que, si l'on rouvre le robinet quand l'équilibre de température sera rétabli, il y aura un écoulement nouveau, qu'un sifflement manifestera. Dans ce second écoulement, aussi bien que dans le premier, la température baissera, et le décroissement de l'élasticité intérieure sera plus rapide que celui de la densité, en sorte que le gaz, quand il cessera de sortir, conservera une densité plus grande que celle de l'air extérieur. Ainsi, en fermant encore le robinet et en laissant au gaz et à la vapeur le temps de se réchauffer, on reproduira les mêmes effets. On peut renouveler cette épreuve plusieurs fois; mais les effets qu'on obtiendra seront de plus en plus faibles, parce qu'à chaque sortie de l'air il y aura une moindre raréfaction et un moindre refroidissement.

Pour vérifier cette explication, il suffit d'adapter un manomètre au récipient, et d'observer les variations successives de la colonne mercurielle qui mesure l'élasticité du gaz intérieur.

4. *Mesurer la tension d'une vapeur mélangée avec l'air, en se servant d'un flacon tubulé (de Woolf), d'un tube droit ouvert par les deux bouts, de mercure, de bouchons et d'un robinet à capsule. Comparer ensuite les tensions de cette vapeur dans le vide et dans l'air à la même température, en opposant ces deux tensions l'une à l'autre. Pour cette expérience on ajoute ux données précédentes un tube barométrique.*

Je prends un flacon *bitubulé*, et j'y verse du mer-

cure jusqu'à une petite hauteur (1). Je plonge dans ce liquide l'extrémité d'un tube droit un peu large, ouvert par les deux bouts, et je maintiens verticalement ce tube par un bouchon de liége qu'il traverse et qui remplit l'une des tubulures du flacon. Je ferme l'autre tubulure par un bouchon de liége percé, dans lequel entre à vis la tige d'un robinet à capsule. Je marque ensuite dans le vase le niveau du mercure (2), après avoir, s'il le faut, retiré du tube un peu de mercure à l'aide d'une longue pipette, de manière à y établir le même niveau que dans le flacon.

Alors dans le petit entonnoir qui surmonte le robinet à capsule je verse un liquide volatil, par exemple de l'éther sulfurique, et je tourne plusieurs fois la clef pour faire tomber dans le vase successivement plusieurs gouttes de liquide (3). Je m'arrête quand

(1) La construction qui suit est fort simple, et je crois devoir l'indiquer aux professeurs qui n'ont pas à leur disposition l'ingénieux appareil imaginé par M. Gay-Lussac pour mesurer la tension d'une vapeur mélangée avec un gaz. Il s'agit donc ici d'une modification apportée à cet appareil dans l'intérêt de l'économie, et non de la science.

(2) On pourrait marquer ce niveau, comme dans le baromètre de Fortin, au moyen d'une tige verticale d'ivoire ou d'acier terminée inférieurement par une pointe qui devrait affleurer la surface du liquide. Cette tige serait fixée au bouchon d'une troisième tubulure, ou tout simplement au bouchon déjà traversé par le tube droit.

(3) Quand le robinet à capsule a été bien travaillé, il ne donne lieu à aucune *fuite* de fluides élastiques, même avec la vapeur d'éther.

le mercure cesse de monter dans le tube et qu'en même temps un petit excès d'éther apparaît sur la surface du mercure dans le vase. Enfin, ayant attendu que l'équilibre de température se soit rétabli, je verse lentement du mercure par le tube droit jusqu'à ce que le liquide soit remonté dans le flacon au niveau marqué d'avance. L'air intérieur ayant ainsi repris son volume primitif, il est évident que la différence actuelle de niveau du mercure dans le tube et dans le vase mesure la tension de la vapeur mélangée avec cet air, tension que je puis ensuite comparer aisément à celle de la même vapeur dans le vide barométrique à la même température.

Cette comparaison devient plus frappante quand on oppose ces deux tensions l'une à l'autre.

Pour cela je me sers d'un flacon *tritubulé*. L'ayant posé sur une large capsule à fond plat, de verre ou de porcelaine, je le remplis de mercure complétement, c'est-à-dire jusqu'aux bords supérieurs des trois goulots. Je remplis presque entièrement du même liquide un long tube droit fermé par un bout, en prenant toutes les précautions usitées pour la construction d'un baromètre. Je taille et ajuste un bouchon de liége de manière qu'il soit traversé à frottement par ce tube et qu'il puisse fermer une des trois tubulures. J'achève ensuite de remplir le même tube avec de l'éther, je le bouche avec le doigt ou avec un petit obturateur de verre, le renverse, et plonge son extrémité inférieure dans le mercure qui occupe l'un des trois goulots, puis je retire le doigt ou l'obturateur, et, après avoir fait descendre le tube

jusqu'au fond du flacon, j'enlève de ce flacon la plus grande partie du mercure qu'il contient, au moyen d'un siphon que j'amorce en inclinant le vase; et, quand j'ai en outre appliqué le bouchon qui peut glisser autour de mon tube vertical au goulot qui donne passage à ce tube, j'ai un baromètre à vapeur, auquel le flacon de Woolf sert de cuvette.

Je ferme ensuite les deux autres tubulures comme plus haut, l'une avec le bouchon qui assujettit le tube droit de l'appareil précédent, l'autre avec le robinet à capsule, et j'établis encore l'égalité de niveau du mercure dans le flacon et dans le tube ouvert (1).

L'appareil étant ainsi disposé et le niveau du mercure marqué avec soin dans le baromètre et dans le flacon, j'introduis les gouttes d'éther successives, et l'on voit le mercure monter dans les deux tubes verticaux. Quand il est devenu stationnaire, ce qui apprend que l'éther a cessé de se vaporiser dans le flacon et que sa vapeur a cessé de se liquéfier dans la chambre du baromètre, je verse peu à peu dans le tube ouvert assez de mercure pour qu'il reprenne dans le vase son niveau primitif. Supposons que cette condition soit remplie. S'il y a égalité entre la tension de la vapeur d'éther dans l'air et la tension de cette vapeur dans le vide, ces deux forces se fai-

(1) Il n'est pas nécessaire de luter les tubulures si les bouchons ont été bien taillés et s'ils sont d'un liége tendre et peu poreux.

sant ici équilibre, la colonne mercurielle dans mon baromètre à vapeur doit avoir, au moment de l'expérience, la même hauteur que dans un baromètre voisin à chambre vide, et c'est ce que l'observation confirme.

Quant à la mesure directe de la tension de la vapeur dans l'air, elle m'est donnée par la différence de niveau du mercure dans le tube ouvert et dans le flacon, aussi bien que la tension dans le vide était connue, avant l'introduction des gouttes d'éther, par l'excès de la colonne du baromètre ordinaire sur la colonne de mercure suspendue dans le tube à vapeur.

Il est presque superflu d'ajouter que, si la vapeur avait dans le vide une tension plus grande ou plus petite que dans l'air, ce qui n'a pas lieu, l'excès de l'une de ces deux tensions sur l'autre serait mesuré exactement par la différence des hauteurs d'un baromètre voisin et du baromètre à vapeur.

5. *Graduer par l'expérience un électromètre à pailles* E, *de manière que les divisions tracées sur une des faces de la cage de verre correspondent à des charges d'électricité marquées par* 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$.....

Supposons qu'on ait deux sphères métalliques égales A et B, semblablement isolées, et un conducteur quelconque C, par exemple un cylindre de métal, monté sur un pied de verre et muni d'un électromètre à cadran.

Concevons aussi que, sur une des faces de la cage

parallèles au plan des pailles, on ait tracé et divisé d'avance un arc de cercle dont le centre soit la projection du point de suspension de ces pailles et dont le rayon soit égal à leur longueur.

On électrisera le cylindre C, ce qui fera monter sa tige mobile, et l'on attendra que cette tige, redescendant peu à peu, fasse avec la verticale un angle déterminé : soit cet angle égal à 30°. A cet instant on touchera C avec la sphère A, qu'on mettra aussitôt en contact avec la garniture métallique de l'électromètre E : les pailles divergeront, et l'on notera les points de la division circulaire qui répondent à ce premier écart.

Après avoir remis la sphère A et l'électromètre E dans l'état naturel, on électrisera C de nouveau, et dès que son pendule électrique sera revenu à 30°, on touchera 1° C avec A, 2° A avec B, 3° E avec A, et, les pailles s'écartant moins que d'abord, on observera l'arc qui mesure ce second écart.

Ayant désélectrisé les trois corps A, B, E, l'on électrisera encore C, et quand l'angle de 30° se sera reproduit, on touchera C avec A, puis deux fois A avec B, en ayant soin de désélectriser B dans l'intervalle de ces deux contacts. On fera ensuite communiquer E avec A, et l'on estimera en degrés le troisième écart des pailles.

On continuera l'application de cette méthode en touchant A avec B 3,4,5...., *n* fois, et n'omettant jamais de désélectriser B entre deux de ces contacts.

On doit opérer dans un air très sec et avec une grande célérité.

Les charges d'électricité marquées par ces écarts successifs des pailles sont entre elles comme 1 est à $\frac{1}{2}$, est à $\frac{1}{4}$, est à $\frac{1}{8}$..... Car dans toutes les épreuves la quantité d'électricité libre du cylindre C est constante; la sphère A lui enlève toujours la même fraction de cette électricité; cette fraction est évidemment réduite à la moitié, au quart, au huitième..... par les contacts de A et de B; enfin l'électricité libre de A, quelle qu'elle soit, se partage toujours dans les mêmes proportions entre cette sphère et l'électromètre E. Celui-ci reçoit donc des charges d'électricité qui peuvent être aussi représentées par 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$..... Tel est le but qu'il fallait atteindre(1).

6. *Etant donnés une lame d'acier trempé et un nombre arbitraire de barreaux aimantés, produire en des points déterminés de cette lame des pôles alternatifs doués de la plus grande énergie possible* (2).

Soit une lame aimantée MN (fig. 1) qui aurait des

(1) Ce procédé est une modification de celui qui est indiqué dans le *Traité de physique* de M. Lamé (t. II, 2e partie, page 72), et qui est fondé sur l'emploi de deux électromètres *parfaitement semblables*. On remarquera que dans la pratique une *ressemblance parfaite* serait plus difficile à obtenir entre deux électromètres à pailles qu'entre deux sphères de métal.

(2) Il s'agit ici de résoudre cette question sans l'intervention des courants électriques, c'est-à-dire sans l'emploi d'hé-

pôles intermédiaires ou *points conséquents* P, Q, R..... On peut la regarder comme formée par la réunion de plusieurs aimants MP, PQ, QR, RN, soudés bout à bout par leurs pôles de même nom, de sorte qu'en P l'on a un double pôle boréal BB′, en Q un double pôle austral AA′, et ainsi de suite (1). Si l'on coupait le barreau MN en un des points P, Q, R..., par exemple en P, les deux pôles se sépareraient, mais seraient toujours de même nature; tandis que, si la rupture de cette lame avait lieu en un autre point O, il naîtrait de part et d'autre de ce point deux pôles de noms contraires.

Supposons maintenant que MN ne soit pas aimantée, et qu'on veuille obtenir des pôles doubles aux points P, Q, R..... Tout se réduit à aimanter séparément les parties MP, PQ, QR, RN, comme si chacune d'elles était isolée. On fixera d'abord sous la lame, perpendiculairement à sa longueur, autant de barreaux aimantés qu'on veut avoir de pôles, de manière que M s'appuie sur un pôle boréal, P sur un pôle austral, Q sur un pôle boréal..... On posera ensuite sur le milieu de MP les extrémités β et α de deux barreaux aimantés, inclinés en sens

lices métalliques dirigées alternativement *dextrorsùm* et *sinistrorsùm* et communiquant avec les pôles d'une forte pile en activité.

(1) Il en résulte que la *courbe des intensités magnétiques* tracée pour le barreau MN aurait des points de rebroussement qui correspondraient aux points conséquents P, Q, R.

contraire sur MP, et on les fera mouvoir parallèlement à eux-mêmes, l'un vers M, l'autre vers P. Il faudra renouveler plusieurs fois cette friction. Chacun de ces aimants *mobiles* doit toucher la lame par le même pôle que l'aimant *fixe* vers lequel il marche. Cette méthode d'aimantation est, comme on sait, celle de Duhamel. On appliquera la même méthode successivement aux autres parties PQ, QR, RN. En aimantant PQ, on aura soin de faire avancer vers P le pôle mobile α, qui, pendant l'aimantation de MP, glissait vers le même point P. On prendra des précautions semblables quand on frottera les portions QR et RN. Enfin l'on retournera MN sur ses autres faces, et sur chacune de ces faces, subdivisée de la même manière, on fera le même nombre de frictions.

Il est évident qu'on augmenterait la force des aimants partiels MP, PQ....., si l'on substituait aux barreaux tant fixes que mobiles de puissants faisceaux magnétiques.

Deux lames MN et *mn* (fig. 2) de même longueur peuvent recevoir en même temps cette aimantation multiple. On les placera parallèlement entre elles sur les aimants fixes, qui formeront avec ces lames les rectangles marqués sur la figure. L'opération étant terminée, si l'on rend cette disposition permanente, elle sera favorable à la conservation des aimants *multipolaires* MN et *mn*. Des barreaux de fer doux peuvent remplacer pour cet usage les aimants auxiliaires M*m*, P*p*... N*n*. A défaut des *contacts* M*m*, P*p*..., N*n*, il est bon d'appliquer MN sur

mn dans l'intervalle des expériences, parce que les pôles A et *b*, BB' et *aa'*...., se maintiendront l'un l'autre par leur attraction mutuelle. Du reste, si l'acier est suffisamment trempé, cette superposition n'est pas nécessaire, et chaque lame garde son état magnétique malgré son isolement (1).

(1) Il ne me paraît pas qu'on se soit occupé beaucoup de faire naître en des points donnés d'un barreau des points conséquents doués d'une certaine énergie. Avant que M. Arago n'eût obtenu des pôles de cette espèce au moyen d'hélices *rhéophores* dont les spires changent de direction, on cherchait à éviter les points conséquents plutôt qu'à les produire, et l'on regardait leur existence comme une anomalie accidentelle. Cependant l'étude des aimants *multipolaires* n'est pas dénuée d'intérêt, et leur état magnétique, pour être moins simple que celui des aimants à deux pôles, n'est ni moins régulier ni moins stable. En 1828 j'ai fabriqué des aimants à 3, 4 et 5 pôles équidistants, avec des fragments de lames de fleurets longs de 8 à 15 pouces, et depuis cette époque l'intensité et la distribution du magnétisme libre ont très peu varié dans ces barreaux. Chacun de leurs pôles porte des clefs d'appartement ou de gros clous. Les pôles intermédiaires sont plus forts que les pôles extrêmes, comme le raisonnement l'indique. Lorsqu'on plonge une de ces lames dans de la limaille de fer, les aigrettes que la réunion des parcelles de métal forme autour de chaque pôle intermédiaire décroissent symétriquement à droite et à gauche de ce point.

Parmi les applications qu'on peut faire des aimants à points conséquents, on doit citer l'aiguille *tripolaire* astatique : c'est tantôt une aiguille en losange, à chape d'agate, mobile sur un pivot; tantôt une longue aiguille cylindrique (à tricoter) suspendue à un fil de soie par un étrier de pa-

7. *Accorder une guitare sans le secours de l'oreille.*

Le procédé dont je me sers pour accorder une guitare (1) est fondé sur ce que la communication

pier. On aimante cette aiguille de manière que ses pôles extrêmes soient de même nature et de forces presque égales, et que son pôle intermédiaire coïncide à peu près avec son milieu. L'action directrice du globe sur une telle aiguille est très faible. J'ai constaté plusieurs fois que cette aiguille tripolaire est un *sidéroscope* aussi commode que sensible.

(1) La guitare, qui offre à la voix un accompagnement agréable, doit être aussi regardée comme un instrument de physicien. En effet, un physicien qui s'est borné à l'étude spéculative de la musique, et qui ne s'est exercé ni les doigts ni l'oreille, peut employer la guitare avec succès pour développer à ses élèves la partie musicale de l'acoustique. Cet instrument, plus portatif, moins dispendieux et beaucoup plus sonore que le *monocorde* ou *sonomètre*, leur présentera une application simple et ingénieuse de la théorie des cordes vibrantes. Si le professeur jette seulement un coup d'œil sur les premières pages d'une *méthode de guitare*, il saura bientôt tirer de ses cordes des exemples de consonnances, d'accords parfaits majeur et mineur, de gamme tempérée...... Mais la guitare étant souvent désaccordée par les variations de température et surtout d'humidité, il faudra qu'il sache réparer lui-même cet accident. Les *méthodes* lui enseigneront le moyen d'accorder l'instrument par quartes et par tierces, ou par unissons et par octaves, ou seulement par unissons. Ce dernier moyen est le plus aisé à pratiquer, parce qu'il est celui qui demande le moins d'oreille. Cependant un procédé qui n'exige que le secours de la vue est en-

des mouvements vibratoires s'opère à travers tous les corps élastiques, et qu'elle est la plus efficace possible pour les corps voisins du corps ébranlé qui vibreraient à l'unisson de celui-ci, s'ils étaient ébranlés directement. Si donc deux cordes fixées l'une auprès de l'autre ont des tensions et des longueurs propres à établir entre elles l'unisson, et qu'on excite dans l'une des vibrations sonores, ces vibrations se transmettent énergiquement à l'autre; et l'on peut, comme le faisait Sauveur, rendre cette transmission sensible à l'œil, en posant d'avance sur la corde d'abord immobile un petit *chevron* de papier, c'est-à-dire une bande étroite de papier, pliée en deux, qui se tient à cheval sur la corde. Dès que cette corde *entend* l'autre, le chevron s'agite et tombe. Si les deux cordes n'étaient pas tendues rigoureusement à l'unisson, l'agitation du papier se-

core plus sûr et plus facile. Car beaucoup de personnes s'imaginent reconnaître l'unisson quand il existe à un quart de ton près, ou ne le distinguent pas bien quand il a lieu en toute rigueur, mais qu'il est accompagné d'une différence de *timbre* ou d'*intensité* dans les sons coexistants. Or, dans les instruments à cordes, les cordes qui vibrent *à vide*, c'est-à-dire dans toute leur longueur, rendent des sons un peu plus forts et moins sourds que celles qui sont raccourcies par la pression du doigt. Il en résulte une petite différence d'intensité et de timbre qui peut tromper une oreille inexpérimentée. Ces considérations m'ont porté à développer ici ce procédé, purement *visuel*, que j'ai déjà publié dans le journal l'*Institut*, n° 106, 20 mai 1835.

rait faible ou nulle, à moins que le son principal de l'une d'elles ne fût un des premiers sons harmoniques de l'autre (1). En partant de ces expériences connues, il est facile d'accorder la guitare.

On sait que cet instrument est pourvu de six cordes, qui prennent les noms des sons qu'elles rendent à vide, savoir : ***mi***$_3$, ***si***$_2$, ***sol***$_2$, ***re***$_2$, ***la***, ***mi***. Supposons qu'on se donne *à priori* l'un de ces sons, par exemple ***sol***$_2$, c'est-à-dire le son que doit rendre la troisième corde. Pour que la seconde corde émette le son exigé ***si***$_2$, il faut qu'elle vibre à l'unisson de la troisième quand le doigt appuyé sur la quatrième *touche* de cette dernière transforme le ***sol***$_2$ en ***si***$_2$. On appuiera le doigt sur cette touche, la *table d'harmonie* étant fixée horizontalement sur une table ou sur les genoux, et un chevron de papier étant posé sur la troisième corde au dessus de la *rosette* ; puis on pincera la seconde corde assez doucement pour que l'instrument ne reçoive pas de secousse. Si la corde pincée donne bien un ***si***$_2$, le chevron

(1) On reconnaît encore l'unisson 1° à l'absence totale de *battements ;* 2° en arrêtant tout à coup les vibrations de la corde *excitatrice* et en percevant le son que rend la corde *excitée*, son qui paraît être le prolongement affaibli du son primitif ; 3° en observant l'augmentation apparente du volume de la corde excitée. Mais ces caractères ne peuvent être ici qu'accessoires, parce que les deux premiers, qui ne sont pas toujours nettement prononcés, supposent l'emploi de l'oreille, et que le dernier n'est bien sensible que pour les trois cordes *filées* de la guitare.



s'agitera vivement et tombera dans la *caisse*. Réciproquement, si le papier sautille et tombe, on en conclura que l'unisson existe, et par conséquent que la seconde corde produit réellement le son si_2 (1). Si le chevron ne bouge pas ou n'éprouve qu'une agitation légère, on pincera de nouveau la seconde corde en appuyant le doigt sur la troisième touche du sol_2; puis, s'il y a lieu, sur la cinquième et sur les autres touches voisines, jusqu'à ce qu'on ait obtenu la chute du papier. Imaginons, par exemple, qu'il tombe quand le doigt presse la troisième touche du sol_2, auquel cas cette corde donne le $si_2^{\flat}$ ou $la_2^{\sharp}$; il s'ensuivra que le son de la corde essayée est aussi un $si_2^{\flat}$. Ce son est trop grave d'un demi-ton; il faudra donc tendre la corde un peu plus, et recommencer ensuite l'épreuve en appuyant le doigt sur la quatrième touche du sol_2. Si le papier ne tombe pas cette fois, cela peut venir de ce qu'on aura augmenté la tension un peu trop (2). Alors on

(1) Cette réciproque peut être affirmée ici, parce que dans le cas actuel on n'est point exposé à confondre un son avec un de ses harmoniques. Toutefois cette même réciproque n'est certaine que si les chevrons ne sont pas trop légers. Il faut que chacun d'eux pèse deux ou trois centigrammes, et qu'ils soient d'un papier un peu fort.

(2) Pour ne pas trop multiplier les détails, j'ai omis dans le texte le cas où le son x de la seconde corde excite dans la troisième à peu près la même agitation quand on presse l'une ou l'autre de deux touches consécutives de celle-ci,

portera le doigt sur la cinquième touche du sol_2, pour le changer en ut_3; et l'on pincera encore la seconde corde. Supposons que cet essai fasse tomber le chevron : que faut-il en conclure? C'est que la seconde corde donne maintenant un ut_3 au lieu du si_2 demandé. On la détendra un peu, afin de corriger cette nouvelle erreur d'un demi-ton, et l'on tournera la *cheville* dans un sens ou dans l'autre, jusqu'à ce que ce soit sur la quatrième touche du sol_2 qu'il faille appuyer le doigt pour déterminer la chute du papier. Au moyen de ces tâtonnements, qu'un peu d'habitude rend très courts, on réglera la tension de la corde avec une précision très satisfaisante.

On accordera de même la *chanterelle* ou le mi_3 à l'aide du si_2. Puis on passera à la quatrième corde ou $ré_2$: on se servira du sol_2, sur lequel on posera un chevron de papier, et, après avoir pressé la cin-

par exemple la troisième et la quatrième. On reconnaîtrait à ce signe que le son x est compris entre $si_2^\flat$ et si_2. Par conséquent il suffirait d'augmenter d'une très petite quantité la tension de la deuxième corde.

Si l'on était curieux de connaître la véritable hauteur du son x, on placerait un petit prisme de bois sur le manche entre les deux touches susdites de la troisième corde, prisme qui limiterait la longueur vibrante λ; et l'on ferait varier la position de cet arrêt, jusqu'à ce que le son x communiquât à λ le maximum de frémissement et fît sauter le chevron..... (Voyez plus loin, dans la 2e partie, *le 9e problème d'acoustique*.)

quième touche de la quatrième corde, on la pincera. Si l'on voit tomber le chevron, on sera sûr qu'étant ainsi raccourcie, la quatrième corde émet un *sol*$_2$; d'où il suit qu'elle donnerait un *ré*$_2$ si elle vibrait dans sa totalité. Dans l'hypothèse où le son du *sol*$_2$ n'agiterait pas le papier, on appuierait successivement le doigt sur les touches voisines de la cinquième, et, en renouvelant l'épreuve, on reconnaîtrait sans peine si la corde qui doit être un *ré*$_2$ est trop tendue ou ne l'est pas assez. On arriverait ainsi par les mêmes essais que plus haut au degré de tension convenable.

On se servira ensuite du *ré*$_2$ ainsi déterminé, pour régler la cinquième corde ou le *la*; et enfin l'on réglera la sixième corde ou le *mi* à l'aide de la cinquième.

Ce procédé, qui n'est long qu'à décrire, m'a très bien réussi pour toutes les guitares dont j'ai pu disposer. Il fournit d'ailleurs de nombreuses vérifications. Par exemple, on appuiera le doigt sur la dixième touche du *mi* (*mi filé*), ce qui transformera ce *mi* en un *ré*$_2$, puis on pincera cette corde : un chevron de papier posé d'avance sur la quatrième corde ou *ré*$_2$ devra tomber sur-le-champ. On peut soumettre à une semblable épreuve deux autres cordes séparées par une corde intermédiaire. Ou bien encore on se fondera sur ce que les vibrations d'une corde peuvent déterminer la subdivision d'une corde voisine dont les parties aliquotes vibreraient à l'unisson de la première : pour constater cette résonnance, on posera des chevrons très légers de papier

blanc au quart, au milieu et aux trois quarts de la corde *mi*, et des chevrons de papier noir au 8e, aux $\frac{3}{8}$, aux $\frac{5}{8}$ et aux $\frac{7}{8}$ de la même corde; puis on pincera la chanterelle (mi_3), et, si elle est bien à la double octave du *mi*, on observera l'immobilité des papiers blancs et la chute des papiers noirs. On ferait une vérification analogue avec les cordes si_2 et *mi*, ou bien avec mi_3 et *la*, puisque les vibrations de si_2 ou de mi_3 doivent diviser *mi* ou *la* en trois parties égales.

J'ai supposé qu'on se donnait à volonté un son qu'on prenait pour point de départ. Si l'on veut que ce son primitif ou *normal* soit identique avec celui que produit un diapason, on pourra satisfaire à cette condition par le même procédé. On fera vibrer le diapason posé sur la table d'harmonie, et l'on modifiera la tension de l'une des cordes, par exemple de la troisième ou sol_2 (1), jusqu'à ce qu'un chevron de papier porté par cette corde tombe dès les premières vibrations des tiges d'acier.

Mais pour me rendre indépendant de la sonorité de la table d'harmonie, et aussi pour offrir à mes élèves un exemple frappant de la communication des mouvements vibratoires par l'intermédiaire de l'air seul, j'aime mieux employer un diapason aux branches duquel on ait soudé deux petits disques égaux

(1) Les musiciens se servent de préférence d'un diapason qui donne le la_3, c'est-à-dire l'octave aiguë du son que doit rendre la cinquième corde de la guitare.

de cuivre ou de fer-blanc (de 20 à 25 millimètres de diamètre) qui se regardent par des faces sensiblement parallèles (1). Ayant trouvé par tâtonnement un flacon tel que la masse d'air qu'il contient renforce le plus possible le son de mon diapason, dont les disques vibrent très près de son orifice, je dispose ce flacon près de la guitare, de manière que l'axe du vase soit à peu près perpendiculaire aux cordes et situé dans leur plan horizontal; puis je fais vibrer les branches armées de leurs disques, et je modifie la tension de l'une des cordes, jusqu'à ce que le papier posé sur elle tombe au son très intense

(1) Dulong s'est servi d'un diapason à branches munies de petits disques métalliques, pour ébranler une colonne d'air dans une direction exactement parallèle à son axe (*Annales de chimie et de physique*, t. XLI, p. 144). Il faisait vibrer l'instrument à l'orifice d'un tube, qu'il raccourcissait à volonté en versant du mercure jusqu'à ce que le son rendu par le tuyau, son qui était toujours le même que celui des lames élastiques, fût le plus fort possible. Le tube contenant du mercure est remplacé ici par un flacon à large goulot. Quand on a rencontré le vase qui convient le mieux à un diapason *armé*, on tire de leur ensemble un son d'une grande intensité, qui ne s'affaiblit que lentement. Le vase étant vertical et renversé, si les lames qui vibrent à son orifice sont voisines d'une membrane tendue sur un cadre ou sur les bords d'une capsule, du sable répandu sur cette membrane s'agite et s'arrange en figures régulières. Si l'on verse quelques gouttes d'éther dans le flacon, le son du diapason perd presque toute sa force; mais il la reprend dès que la vapeur d'éther s'est dissipée.

du diapason. Quand j'ai établi l'unisson, il m'est facile de reconnaître qu'à plus de six pouces de distance de la corde, le diapason vibrant à l'orifice du vase déterminerait encore la chute du papier.

J'accorde ainsi deux guitares en leur imposant le même son normal sol_2; et, après avoir fixé l'une d'elles sur une table de manière que ses cordes soient horizontales et portent chacune un petit chevron de papier, tenant à la main la seconde guitare à quelques pouces de distance de la première, je pince successivement chacune des cordes de la seconde, et l'on voit tomber tour à tour les chevrons posés sur les cordes correspondantes à celles qui ont été ébranlées (1). Cette expérience est connue des musiciens; mais à l'aide du procédé que je viens de décrire, elle peut être préparée et répétée infailliblement par toute personne dépourvue du sens musical.

Ce procédé, *qu'un sourd même pourrait employer* pour accorder très exactement une guitare, est sans doute applicable à d'autres instruments à cordes. Mais plus les cordes sont grosses, plus il faut augmenter le poids des chevrons (2).

(1) Quand les deux guitares ont été accordées par la méthode précédente, on ne réussit pour *toutes* les cordes que si les deux manches sont *casés* tout à fait de la même manière. Je me suis servi avec succès de deux guitares fabriquées à Naples par le même luthier, par Gennaro.

(2) Lorsqu'on vient d'accorder ainsi la guitare, il est bon d'en comparer les différents sons. Étant sûr de la justesse de

8. ***Faire vibrer toutes les cordes d'une guitare en pinçant une seule d'entre elles.***

Pour que cet effet se produise, il suffit que cinq cordes, les unes entières, les autres raccourcies, puissent se mettre à l'unisson de la sixième, soit par leurs vibrations de totalité, soit par les vibrations simultanées de leurs parties aliquotes.

Nous choisirons pour corde *excitatrice* la chanterelle ou mi_3.

1° Recouvrons la cinquième touche du si_2 d'un petit prisme de bois dont la face inférieure soit évidée et dont l'arête supérieure, parallèle aux touches, limite la corde : le si_2 est ainsi transformé en mi_3.

2° Si nous plaçons un arrêt semblable entre la corde sol_2 et sa neuvième touche, ce sol_2 devient aussi un mi_3.

3° Un troisième prisme appliqué sur la seconde touche du $ré_2$ en fait un mi_2, qui par sa bissection spontanée donnera un double mi_3.

4° et 5° Nous laisserons au *la* et au *mi* toute leur longueur, parce qu'en se divisant, l'un en trois, l'autre en quatre parties égales, ils formeront respectivement un triple et un quadruple mi_3.

leurs intervalles, on ne craindra pas de se fausser l'oreille par cette étude. En renouvelant ces exercices, on se familiarisera avec les sensations de l'unisson, de l'octave, de la quinte,.... et bientôt on n'aura plus besoin de chevrons de papier pour accorder l'instrument.

Faisons maintenant vibrer la chanterelle. Si la guitare est bien accordée, les cinq autres cordes vont résonner en même temps, savoir : les deux premières par des mouvements de totalité, et les trois dernières par les mouvements simultanés de leurs moitiés, de leurs tiers et de leurs quarts.

Si nous arrêtons tout à coup les vibrations de la chanterelle, nous entendrons encore pendant quelques instants des sons très doux et très purs, dont la hauteur commune est celle du son primitif, et qui ont une certaine intensité parce qu'ils se renforcent mutuellement (1).

On peut varier l'expérience en posant d'avance des chevrons de papier blanc et noir sur les *nœuds* et sur les *ventres* de vibration..... On prendra des chevrons plus ou moins pesants pour les différentes cordes, suivant qu'elles doivent vibrer en totalité ou se diviser en un nombre plus petit ou plus grand de parties.

9. ***Evaluer sans le secours de l'oreille l'intervalle musical de deux sons intenses.***

J'applique à cette évaluation la guitare accordée par le procédé du n° 7. La méthode que j'emploie consiste à faire vibrer le corps sonore très près de l'instrument, dont toutes les cordes, entières ou rac-

(1) Cette expérience pourrait être appelée *la résonnance des douze mi de la guitare.*

courcies, portent des chevrons de papier, et à diminuer progressivement la partie libre de chaque corde, jusqu'à ce que le son de ce corps imprime à l'une d'elles le maximum de frémissement, maximum que décèle la chute du papier.

La hauteur cherchée du son *excitateur* est *en général* la même que celle du son rendu par la corde *excitée*, et cette dernière hauteur est donnée par les divisions du manche et par la position de l'arrêt, dès que l'on connaît le son *normal* d'où l'on est parti pour accorder la guitare.

L'arrêt qui limite la portion vibrante de la corde est un petit prisme de bois (n° 8) posé sur une case ou sur une touche, et qu'on doit déplacer très peu d'une épreuve à la suivante.

L'oreille la moins musicale permet d'abréger beaucoup les tâtonnements que cette méthode exige. S'agit-il, par exemple, d'un son très grave qui se rapproche d'un simple bourdonnement, on peut borner les essais au *mi filé*, c'est-à-dire à la plus grosse corde.

On pourrait quelquefois se tromper d'une octave, si l'on n'examinait pas avec un peu d'attention les résultats qu'on obtient. Ainsi mon diapason *armé* sol_2 (n° 7) fait tomber un chevron (de deux à trois centigrammes) presque aussi rapidement quand la corde sol_2 est réduite à moitié que lorsqu'elle a toute sa longueur; ou, en termes généraux, il peut arriver que la résonnance de l'octave aiguë soit presque aussi forte que celle de l'unisson. On risquerait donc de confondre un son avec son octave aiguë, si, à dé-

faut d'oreille, on ne levait la difficulté par d'autres essais *visuels*. Voici une épreuve décisive : qu'on réduise la chanterelle ou mi_3 à un sol_4 (en plaçant l'arrêt sur la quinzième touche), et l'on s'assurera que le diapason sol_2 excite dans la corde des vibrations peu sensibles, ce qui vient de ce que la double octave résonne faiblement. Ou bien encore, que l'on change le *mi* filé en un *sol* (en posant l'arrêt sur la troisième touche), on reconnaîtra que le diapason sol_2 ne fait résonner cette corde qu'au moyen d'une bissection, facile à constater avec trois chevrons (n°s 7 et 8). On ferait les mêmes vérifications dans tous les cas semblables, pour assigner le véritable unisson du son proposé.

Cette remarque fait concevoir comment la méthode peut s'étendre à des sons plus hauts ou plus bas d'une octave que les sons extrêmes de l'instrument (1). Je citerai pour exemple un de mes diapasons, qui a des branches minces, longues de 200^{mm}, et soudées à deux disques de fer-blanc de 14^{mm} de rayon. Le son qu'il produit est évidemment plus grave que celui du *mi* filé. Or en faisant vibrer ce diapason appuyé sur la table d'harmonie, j'ai trouvé que pour faire tomber un chevron posé sur le *mi* il faut placer le prisme de bois à égale distance entre la troisième touche et la quatrième, et par consé-

(1) Ces sons extrêmes variant avec les tensions des cordes, la méthode embrasse un intervalle de plus de cinq octaves et demie.

quent transformer la corde en un *sol demi-dièse* (voy. plus loin le 9e *problème d'acoustique*). Le même diapason n'agite pas sensiblement la troisième corde sol_2 devenue un sol_2 *demi-dièse :* d'où je conclus que le son demandé est à l'octave grave du *sol demi-dièse* de ma guitare.

Mes expériences ont porté jusqu'à présent sur des diapasons, des timbres, des cloches de verre, des triangles d'acier et des plaques de cuivre.

La méthode dont il s'agit s'applique avec la plus grande facilité aux diapasons de toute espèce, simples ou *armés*. Quand on les pose sur la table d'harmonie, on doit avoir soin de choisir pour points d'appui les parties de cette table qui sont les mieux situées pour recevoir et transmettre les vibrations (1).

Quant aux timbres, il y a de l'avantage à renforcer leurs sons au moyen d'un tuyau de bois ou de métal, carré ou cylindrique, muni d'un piston qu'on

(1) J'ai constaté ainsi que mon sol_2 normal est plus grave d'une quinte que le *la* du diapason ordinaire, *la* qui est le son que donne à vide l'une des cordes du violon. Mes guitares sont donc accordées à une quarte au dessous du ton adopté pour l'exécution musicale. Cet abaissement de ton me paraît favorable à la vibration des cordes, parce qu'étant moins tendues elles sont plus éloignées de leur *limite d'élasticité*. En outre elles risquent moins de se rompre et *tiennent l'accord* beaucoup plus long-temps. Cependant il est bon de vérifier à chaque expérience si l'accord de l'instrument s'est bien maintenu.

fait mouvoir jusqu'à ce que l'intensité du son atteigne son maximum (1).

L'un des timbres que j'ai employés donnait un *mi*$_3$ quand un archet en frottait les bords lentement et avec une assez grande pression. C'était le son le plus grave qu'on en pût tirer. Le même timbre choqué avec un marteau de bois recouvert de peau émettait un *mi*$_4$, son qui était à l'octave aiguë du précédent. Le tuyau renforçant était plus court dans le deuxième cas que dans le premier. Pour d'autres timbres le son produit par le choc et le son le plus grave dû au frottement n'avaient pas le même intervalle. (Voyez d'ailleurs l'*Acoustique* de Chladni, pages 236 et 237).

Je rapporterai encore mes expériences sur une plaque carrée de cuivre rouge, dont le côté était de 110^{mm} et dont l'épaisseur était de 2^{mm},25. La plaque était fixée par son centre et vibrait à l'ouverture d'un tuyau renforçant. L'archet passant très près de l'un des angles, elle rendit un *ut*$_3$#, et quand l'archet fut appliqué au milieu d'un côté, elle émit un *sol*$_3$#. Ces deux sons étaient donc exactement à la quinte l'un de l'autre, comme l'a trouvé Chladni (*Traité d'Acoustique*, page 107, figures 63 et 64).

Si l'on veut pratiquer la méthode avec toute la précision qu'elle comporte, on doit avant tout véri-

(1) On sait que c'est M. Savart qui a imaginé les tuyaux renforçants à fond mobile (*Annales de chimie et de physique*, t. XXIV, p. 61).

fier les divisions chromatiques du manche de l'instrument que l'on consulte (1). Cependant cette épreuve ne me semble pas indispensable pour les guitares dont la construction a été soignée. Il est vrai que toutes celles qui passent pour bonnes n'ont pas rigoureusement la même graduation. Mais les essais comparatifs auxquels j'ai soumis des guitares de Naples, de Troyes et de Paris, m'ont prouvé que ces petites différences de graduation n'entraînent que de faibles différences dans les valeurs calculées des intervalles. Ainsi, d'après l'une de ces guitares le son d'un de mes diapasons est élevé de 7st,2 au dessus du sol_2 normal. D'après une autre il ne serait élevé au dessus du sol_2 que de 6st,8. On voit que le second résultat s'éloigne peu du premier. La moyenne 7st serait précisément une quinte, et la justesse de cette moyenne m'a été confirmée par plusieurs musiciens qui ont l'oreille très délicate.

J'ajouterai que ce procédé est évidemment restreint aux sons qu'on rend assez intenses pour faire tomber d'une corde des chevrons légers. Mais ses applications pourront s'étendre à mesure qu'on perfectionnera les moyens dont on dispose aujourd'hui pour renforcer les sons (2).

(1) M. de Prony, dans son *Instruction sur le calcul des intervalles musicaux*, a fait connaître plusieurs moyens de simplifier cette vérification (page 89).

(2) On me pardonnera d'avoir insisté si longuement sur une méthode qui était sans doute facile à déduire de faits connus, mais qui, substituant la vue à l'ouïe, rend accessi-

Remarque finale.

Il nous paraît inutile de multiplier davantage les exemples de problèmes résolus par le seul emploi du raisonnement. C'est par les questions de ce genre que nous avons dû commencer, parce que ce sont elles qui demandent le moins d'instruction. Mais il ne faut pas croire qu'elles soient les plus faciles; elles échappent plus aux règles, elles exigent plus de sagacité naturelle et de réflexion que tout autre problème dont la solution repose sur des principes mathématiques. Le calcul n'est pas un embarras, mais un secours pour le physicien qui l'applique à ses recherches. Dès qu'il a trouvé la construction ou l'équation d'un problème, il n'a plus qu'à se laisser conduire par la géométrie ou par l'analyse. Souvent l'interprétation des formules auxquelles il parvient lui signale les erreurs qu'il a pu commettre, ou même lui révèle des vérités aussi curieuses qu'inat-

bles à tous les physiciens beaucoup d'expériences d'acoustique réservées exclusivement jusqu'ici à quelques oreilles privilégiées. Je reconnais que le procédé le plus exact et le plus général pour comparer les sons est l'emploi de la *sirène* de M. Cagniard-Latour. Mais pour manier cet instrument ingénieux il faut de l'habitude, de l'adresse, et le sentiment de l'unisson. Quant à l'oreille, ses jugements sont plus prompts, si elle est exercée, mais ils ne sont pas plus sûrs. Encore n'apprécie-t-elle bien que les intervalles usités en musique et les nombres entiers de semi-tons; au lieu qu'une guitare bien *casée* sert à estimer des intervalles quelconques et à fractionner les semi-tons au moins jusqu'en dixièmes.

tendues ; tandis que dans les questions inaccessibles au calcul l'esprit est abandonné à ses propres ressources ; on risque d'entrer dans une voie pénible ou fausse, de ne pas apercevoir le sujet sous toutes ses faces, de ne pas tirer d'un résultat obtenu toutes les conséquences possibles. Il faut alors déployer à la fois la force de conception, celle d'énumération et celle de déduction. On ne saurait donc trop répéter aux physiciens qu'ils doivent avant tout faire une étude approfondie des mathématiques. Cette étude a pour eux le double avantage d'étendre le champ de leurs investigations en physique et d'armer leur intelligence d'un puissant levier.

CHAPITRE II.

EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE RÉSOLUS PAR L'ARITHMÉTIQUE.

10. *Un morceau de buis (de France) pèse 57g dans l'air. Ce corps flotte d'abord sur l'eau pure à la température de 4° (C), et une très faible partie du solide dépasse le niveau. Les pores du buis étant perméables à l'eau, le buis au bout de quelque temps descend au fond du liquide. On saisit l'instant où cette chute commence pour retirer le corps, on l'essuie, et on le pèse rapidement dans l'air. On trouve alors que son poids est devenu égal à 62g,5.*

Déterminer approximativement d'après ces données la densité de ce buis et son volume.

Au moment où le buis va descendre dans l'eau, le poids acquis par ce corps est à peine supérieur au poids d'un égal volume de liquide. Nous pouvons donc prendre 62g,5 pour le poids de l'eau pure sous le même volume que notre morceau de buis. D'ailleurs la petite erreur que nous commettons ainsi *en plus* peut devenir nulle ou même changer de *signe* pendant la seconde pesée, qui est accompagnée

d'une évaporation partielle de l'eau dont le corps s'est imbibé. $\frac{57}{62,5}$ ou 0,912 est donc la densité du buis comparée à celle de l'eau. Quant au volume demandé, il est de $62^{cc},5$, puisqu'un gramme d'eau pure occupe un centimètre cube à 4°.

11. *On a un tube cylindrique gradué, fermé par le haut, contenant de l'air sec dans sa partie supérieure et maintenu verticalement sur une large cuve pleine de mercure. La hauteur du sommet du tube au dessus du niveau du liquide de la cuve est de 355 millimètres. Le mercure s'élève dans ce tube plus haut que dans la cuve de 191^{mm}, et l'on trouve qu'il faut enfoncer le tube de 232^{mm} pour que le niveau du liquide y devienne le même que dans la cuve. On demande quelle est la hauteur du mercure dans le baromètre au moment de l'expérience.*

L'air contenu entre le sommet du tube et le mercure occupait d'abord 355^{mm}—191^{mm} ou 164^{mm}. Quand le tube est abaissé de manière que les deux niveaux se confondent, le volume de l'air intérieur est réduit à 355^{mm}—232^{mm} ou à 123^{mm}. 123 étant les $\frac{3}{4}$ de 164, on voit que le volume du gaz est devenu les $\frac{3}{4}$ de ce qu'il était d'abord. Par conséquent, d'après la loi de Mariotte, la pression initiale que cet air supportait était les $\frac{3}{4}$ de la pression finale, qui est évidemment égale à celle de l'atmosphère; or la pression initiale était égale à celle de l'atmosphère diminuée du poids de 191^{mm} de mercure : donc ces 191^{mm} de mercure faisaient équilibre au quart de

la pression atmosphérique ; d'où il suit que cette dernière pression est de 4 fois 191^{mm} ou de 764^{mm}. Donc enfin la hauteur cherchée du baromètre est de 764^{mm}.

Des observations de ce genre pourraient remplacer au besoin l'inspection du baromètre. Mais il faudrait opérer, comme l'énoncé l'indique, sur une très large cuve à mercure, pour qu'il fût permis d'y négliger les variations de niveau. Si l'on n'avait à sa disposition qu'une cuve étroite, on y rendrait le niveau constant en la remplissant de mercure jusqu'aux bords ou jusqu'à une petite ouverture pratiquée latéralement.

12. *Suivant Brisson* (1), *un pied cube d'air pèse 1 once 3 gros 3 grains sous la pression de 28 pouces et à la température de 5 degrés octogésimaux.*

D'après MM. Biot et Arago, un litre d'air sec pèse 1^{g},2995 *à* 0° *sous* 76^{cm}.

Ces deux résultats sont-ils d'accord entre eux ?

Pour résoudre cette question il suffit de traduire les anciennes mesures en nouvelles, et de ramener la pesée de Brisson aux mêmes circonstances de pression et de température que la pesée de MM. Biot et Arago.

Un pied cube équivaut à 34^{l},277. 1 once 3 gros 3 grains reviennent à 42^{g},226. Ainsi 34^{l},277 d'air

(1) *Traité de physique*, 3e édit., t. II, n° 893.

pèseraient $42^g,226$, et par conséquent 1^l pèserait $\frac{42^g,226}{34,277}$ ou $1^g,2319$.

La pression était de 28 pouces ou de $75^{cm},796$. Mais la colonne barométrique était à $5°(R)$ ou à $6°,25(C)$. Si le mercure avait été à 0°, la même pression aurait été mesurée par une colonne égale à

$$\frac{75^{cm},796 \times 5550}{5556,25} = 75^{cm},711.$$

Actuellement si le litre d'air avait été soumis à une pression estimée par une colonne de mercure de 76^{cm} à 0°, son poids $1^g,2319$ eût été augmenté dans le rapport de 76 à 75,711, par conséquent il serait devenu $1^g,2366$.

Enfin si l'air eût été lui-même à 0°, le poids x d'un litre de ce gaz aurait été un peu plus grand sous une égale pression. Or, x est lié à $1^g,2366$ par la proportion

$$x : 1,2366 :: 1 + \frac{3 \times 6,25}{800} : 1,$$

d'où nous tirons $x = 1^g,2656$.

Ainsi, en partant de la loi de Mariotte et des coefficients donnés par Dulong et Petit, et par M. Gay-Lussac, pour les dilatations du mercure et des gaz, nous déduisons du nombre obtenu par Brisson que 1^l d'air pèserait $1^g,2656$ à 0° sous 76^{cm}; tandis que d'après MM. Biot et Arago ce volume d'air pèse $1^g,2995$ dans les mêmes circonstances.

Les deux résultats proposés ne sont donc pas tout à fait d'accord. Il est très probable que l'erreur est du côté de Brisson, qui a dû arriver à un poids trop

faible, parce qu'il a pesé l'air tel qu'il se trouve dans l'atmosphère, sans avoir soin de le dessécher préalablement (1).

13. *On fait vibrer transversalement une corde de fer dont la longueur est de* $0^m,5825$, *dont les deux extrémités sont fixes, et qui est tendue par un poids de* 14363 *grammes.* $3^m,400$ *de la même corde pèseraient* $5^g,385$. *Quel est le nombre n de vibrations simples que cette corde exécute par seconde?*

Ce problème appartient à l'*arithmétique*, quoiqu'on soit obligé pour le résoudre de s'appuyer sur une formule d'*algèbre*. On a seulement à traduire cette formule en nombres, ce qui n'exige que des opérations arithmétiques.

Soient l la longueur de la corde, p son poids, P le poids qui la tend, et g l'intensité de la pesanteur: on a la formule

$$n=\sqrt{\frac{gP}{lp}}$$

On sait qu'à Paris $g = 9^m,8088$. D'ailleurs

(1) La comparaison des deux résultats aurait pu être poussée plus loin, si Brisson avait noté le degré de l'hygromètre à cheveu au moment de son expérience. Il se présente à ce sujet une question que nous nous contenterons d'énoncer : *Quel aurait dû être l'état hygrométrique de l'air pesé par Brisson, pour que son résultat fût parfaitement identique avec celui de MM. Biot et Arago?*

$l = 0^m,5825$; $P = 14363^g$; p est fourni par la proportion

$$p : 5^g,385 :: 0,5825 : 3,400,$$

d'où l'on tire $p = 0^g,92258$.

Si l'on substitue ces nombres à g, l, P et p, on trouve $n = 512$ (1).

14. ***Pourquoi la sixième corde d'une guitare vibre-t-elle dans sa totalité quand on pince à la fois les deux premières cordes?***

Cette résonnance, que l'on constate avec l'ouïe ou par des chevrons de papier (nos 7, 8 et 9), dérive de ce fait découvert par Tartini, que, si deux sons représentés par des nombres entiers premiers entre eux sont émis en même temps, il résulte de leur ensemble un troisième son exprimé par l'unité. Or les sons si_2 et mi_3 rendus par la seconde corde et par la première peuvent être désignés par 3 et par 4,

(1) La corde dont il s'agit s'emploie ordinairement dans le piano au milieu du clavier. Elle est désignée dans le commerce sous le nom de *corde du* n° 1. Le son qu'elle rend ici est l'*ut* de la clef d'*ut* dans l'orchestre du théâtre italien. C'est le son que M. de Prony appelle *son fixe* (page 95 de l'*Instruction sur le calcul des intervalles musicaux*). Le *la* du diapason italien, ou *la* que rend à vide l'une des cordes du violon, est élevé d'une sixte au dessus de l'*ut son fixe*. Ce *la* répond donc à $\frac{5}{3}$ de 512 ou à 853 vibrations simples par seconde. L'*ut* du violoncelle est à la double octave au dessous de l'*ut son fixe*, et par conséquent résulte de 128 vibrations simples par seconde.

c'est-à-dire que les nombres de vibrations synchrones qui les produisent sont entre eux comme 3 est à 4. Le son *résultant* figuré par 1 est évidemment à la double octave au dessous du son 4, et par conséquent se trouve à l'unisson du son *mi* propre à la sixième corde : celle-ci doit donc être *excitée* par le son résultant *mi* et vibrer dans toute sa longueur.

On expliquerait de même pourquoi les deux sons simultanés la_2 et mi_3 font résonner la cinquième corde, qui donne un *la*.

CHAPITRE III.

EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE RÉSOLUS PAR LA GÉOMÉTRIE.

15. *Un observateur animé d'un mouvement rectiligne et uniforme insensible pour lui-même regarde un objet* A (fig. 3) *qui se meut uniformément et en ligne droite dans le même plan que lui. En quel point l'observateur croira-t-il voir l'objet au bout de l'unité de temps? Les positions initiales* O *et* A *de l'observateur et de l'objet sont connues, et leurs vitesses* OO′, AA′, *sont données en grandeur et en direction.*

Imaginons qu'à l'origine des temps on imprime à l'observateur et à l'objet des vitesses OO″ et AB égales, parallèles et opposées à la vitesse réelle OO′ de l'observateur. Celui-ci, étant alors sollicité par deux vitesses égales et contraires OO′, OO″, demeurerait en repos, et l'objet A prendrait une vitesse AC qui serait la résultante des deux vitesses AA′, AB, et qui par conséquent serait la diagonale du parallélogramme ABCA′; en sorte qu'au bout de l'unité de temps, par exemple d'une minute, l'objet serait

arrivé en C, et OC serait le rayon visuel que le spectateur dirigerait vers lui. Or il est aisé de reconnaître que ce même point C est celui où le spectateur croit voir l'objet au bout de 1′; car, la figure OCA′O′ étant un parallélogramme, le rayon visuel O′A′ suivant lequel le spectateur aperçoit réellement l'objet au bout de 1′ est égal et parallèle au rayon fictif OC. Donc pour le spectateur qui se croit immobile en O le point C paraît être à la même distance et dans la même direction que le point A′ aperçu réellement par lui du point O′. Donc enfin C est le point demandé.

Ainsi, quand le spectateur n'a pas la conscience de son propre déplacement, les apparences sont les mêmes pour lui que s'il était immobile et que l'objet fût sollicité à la fois par sa vitesse réelle et par celle du spectateur prise en sens contraire. Telle est l'explication de toutes les illusions d'optique produites par la simultanéité de deux mouvements dont l'un est inaperçu.

16. ***Quelle est la condition que les angles d'un prisme doivent remplir pour que les images qu'il donne par une réflexion intérieure n'aient pas leurs contours irisés?***

Soit ACB (fig. 4) une section perpendiculaire aux arêtes du prisme. Soit LI un rayon incident contenu dans cette section, et soit IR un rayon réfracté d'une couleur quelconque X. Abaissons du point I une perpendiculaire III sur AB, et prolon-

geons-la d'une quantité II' égale à II; tirons AI'; joignons I' à R, et prolongeons I'R jusqu'en E : RE sera évidemment le rayon réfléchi correspondant au rayon intérieur IR. Traçons aussi LG perpendiculaire à AB, et prolongeons-la de GL' égale à LG; enfin joignons I' à L'. Le rayon EM de la couleur X émergera dans la même direction que s'il avait suivi la route L'I'E : d'où il suit que EM sera parallèle à L'I', si AI' est parallèle à CB, ce qui exige que l'angle CBA soit égal à l'angle I'AB, et par conséquent à son égal CAB. Donc, si les angles A et B sont égaux, les images que le prisme donne par une réflexion intérieure sur AB seront les mêmes que si les rayons lumineux avaient traversé un verre à faces parallèles; donc ces images seront dépourvues d'iris.

Si B différait de A, la face réelle CB et la face fictive AI' se rencontreraient suivant une droite projetée en D et parallèle aux arêtes du prisme. Dans ce cas il est clair que l'émergence aurait lieu comme si le rayon L'I'EM traversait un prisme ADC dont l'angle réfringent serait D ou B—A. Or on sait que les images auraient alors leurs contours irisés, et les iris seraient d'autant plus prononcés que les deux angles A et B différeraient plus l'un de l'autre.

Donc enfin l'égalité des deux angles adjacents à la face qui sert de miroir est suffisante et nécessaire pour qu'un prisme soit *achromatique par réflexion*.

17. *Démontrer qu'un corps de forme quelconque, sollicité par la pesanteur seule, et dont les mouvements sont gênés par quelque obstacle, n'est en équi-*

libre qu'autant que son centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible.

Prouver aussi que dans le premier cas l'équilibre est instable, et que dans le second il est stable (1).

Soit un corps dont les mouvements ne soient pas parfaitement libres, par exemple qui ne puisse se mouvoir qu'autour d'un point fixe ou d'une droite fixe, ou sur un plan horizontal. Si l'on donne successivement à ce corps toutes les positions qu'il lui est permis de prendre, son centre de gravité G décrira une surface L dont la nature dépendra de la forme du corps et de l'obstacle qui limite ses mouvements. On peut donc réduire ce corps par la pensée au seul point G sollicité par la pesanteur et assujetti à demeurer sur la surface L. Or, pour que ce point G y soit en équilibre, il faut que la pesanteur soit normale à la surface au point qui coïncide avec G, et en conséquence que le plan tangent en ce point soit horizontal : c'est ce qui a lieu seulement quand

(1) Comme nous comprenons les *théorèmes à démontrer* parmi les *problèmes*, nous avons cru inutile de présenter cet énoncé sous une forme interrogative et avec toute l'indétermination qu'il comporte. Nous aurions pu le poser comme il suit : *Quelle est la condition nécessaire pour l'équilibre d'un corps pesant dont les mouvements sont gênés par quelque obstacle ? Dans quel cas cet équilibre est-il stable ou instable ?* On a le choix entre ces deux énoncés, suivant le degré de difficulté qu'on veut donner à la question. La distinction qu'on établit en géométrie entre les *théorèmes* et les *problèmes* ne serait d'aucune importance dans ce recueil.

le centre de gravité G est au point le plus haut ou le plus bas de la surface L. Donc l'équilibre n'existe que dans l'un ou l'autre cas.

Actuellement, si le centre G est au point le plus haut, et qu'on l'écarte un peu de cette position, le point G s'abaissera, la pesanteur ne sera plus détruite entièrement par la résistance de la surface L; et comme la composante tangentielle de cette force tend à faire descendre le point G, il s'écartera de plus en plus de sa position primitive. Donc l'équilibre est instable.

Au contraire, si G occupe le point le plus bas de L et qu'on le dérange un peu, le point G s'élèvera, et la pesanteur, reprenant une partie de son action, l'abaissera de nouveau: par conséquent G reviendra vers sa position initiale. Donc l'équilibre est stable.

Dans le cas particulier où la surface L serait un plan horizontal, l'action de la pesanteur sur le point G serait anéantie, quelle que fût la position de G sur L: d'où il suit que, si le corps était un peu dérangé d'une position d'équilibre, il ne tendrait ni à y revenir ni à s'en écarter davantage. On dit alors que l'équilibre est *indifférent* (1).

(1) Si quelque obscurité résultait de la généralité de nos raisonnements, il serait aisé d'éclaircir la démonstration en l'appliquant à un exemple simple, tel que celui d'une sphère non homogène mobile autour de son centre C de figure. La surface L serait dans ce cas une sphère qui aurait aussi pour centre le point C, et dont le rayon serait la distance CG des

Nous ne nous arrêterons pas plus long-temps sur les problèmes susceptibles d'une solution purement géométrique, parce que les questions élémentaires de cette espèce sont en général celles qui présentent le moins de difficulté. Toutefois dans les chapitres suivants nous emprunterons à la géométrie soit des constructions, soit des théorèmes, lorsqu'il s'agira de traiter des problèmes d'un genre mixte, où la géométrie sert à poser les équations et l'algèbre à les résoudre.

centres de figure et de gravité..... Une sphère homogène posée sur un plan horizontal offrirait un exemple de l'équilibre indifférent.

Voyez d'ailleurs, dans la *Mécanique* de M. Poisson (2e édition, t. I, n. 348), la démonstration analytique de ces théorèmes d'équilibre.

CHAPITRE IV.

EXEMPLES DE PROBLEMES DE PHYSIQUE RESOLUS PAR L'ALGEBRE.

18. ***Quelle est la condition algébrique qui doit être remplie pour qu'une bulle d'eau savonneuse puisse s'élever dans l'air atmosphérique?***

On donne le rayon extérieur r ***de l'enveloppe sphérique, son épaisseur moyenne*** e, ***et les densités*** D, d ***et*** δ, ***de l'eau savonneuse, de l'air et de l'hydrogène.***

Pour que la bulle monte dans l'air, il faut que le poids de l'enveloppe augmenté de celui de l'hydrogène soit moindre que le poids du volume d'air déplacé. On a donc l'inégalité

$$\frac{4}{3}\pi[r^3-(r-e)^3]\,D+\frac{4}{3}\pi(r-e)^3\delta<\frac{4}{3}\pi r^3 d,$$

d'où l'on tire successivement

$$r^3(D-d)<(r-e)^3(D-\delta),$$

$$r\sqrt[3]{D-d}<(r-e)\sqrt[3]{D-\delta},$$

et enfin

$$\frac{r}{e}>\frac{\sqrt[3]{D-\delta}}{\sqrt[3]{D-\delta}-\sqrt[3]{D-d}}.$$

Si l'on pose par approximation $D=1$, $d=0,0013$, $\delta=0,07\times0,0013=0,000091$, on trouvera (1) $\frac{r}{e}>2475$. Soit $e=0^{mm},001$, il faudra que l'on ait $r>2^{mm},475$.

Si l'on donne à r une valeur qui satisfasse à cette condition, on calculera facilement la force ascensionnelle de ce petit ballon à la surface de la terre, force qui est égale à l'excès du poids de l'air déplacé sur le poids total de la bulle.

19. ***Quelle serait la condition nécessaire pour qu'une enveloppe sphérique de cuivre épaisse de*** e^{mm} ***et complétement purgée d'air pût s'élever dans l'air atmosphérique ?***

Nous plaçons cette question après la précédente, pour offrir l'exemple d'un problème dont la solution soit facile à déduire de celle d'un autre problème déjà traité. En effet pour obtenir la condition demandée, il suffit de poser $\delta=0$ dans l'inégalité finale du n° 18; il vient

$$\frac{r}{e}>\frac{\sqrt[3]{D}}{\sqrt[3]{D}-\sqrt[3]{D-d}}.$$

(1) La valeur numérique attribuée ici à δ suppose l'élasticité actuelle de l'hydrogène égale à la pression de l'atmosphère, ce qui n'est pas rigoureusement exact. L'élasticité intérieure est un peu plus grande que la pression atmosphérique, parce qu'elle doit faire équilibre non seulement à cette pression, mais encore à la force avec laquelle les molécules de l'enveloppe tendent à se resserrer en une petite sphère pleine.

D est ici la densité du cuivre, d celle de l'air, r est le rayon extérieur de l'enveloppe. Si l'on fait $D=8,8$ et $d=0,0013$, cette inégalité deviendra $\frac{r}{e}>20645,6$. Soit $e=1^{mm}$, on devra prendre $r>20^m,6456$.

S'il était possible de fabriquer un aussi énorme ballon de cuivre et de le purger d'air, il crèverait infailliblement sous la pression atmosphérique (1).

20. *Un tube cylindrique vertical plein de mercure communique par un très petit orifice percé dans sa base avec un vase cylindrique fermé plein d'air sec dont l'élasticité est d'abord égale à la pression atmosphérique* p^{cm}. *La hauteur du tube est de* a^{cm}, *a étant moindre que* p, *et sa base de* m^{cmq}. *La hauteur du vase est de* b^{cm}, *et sa base de* n^{cmq}.

Le tube étant d'abord fermé par le haut, si l'on vient à déboucher dans l'air son ouverture supérieure, une partie du mercure s'écoulera dans le vase. On demande où se fixera le niveau du liquide dans le tube au moment où cet écoulement s'arrêtera.

Exemple numérique : $p=76, \begin{cases} a=24, \\ m=1, \end{cases} \begin{cases} b=8, \\ n=50. \end{cases}$

Remarquons d'abord que le mercure ne peut s'écouler entièrement. En effet, soit une molécule li-

(1) Ce singulier aérostat a été cependant proposé par Lana en 1670. Voyez le *Traité de physique* d'Haüy, 3e édit., t. I, n° 494.

quide située à l'orifice du tube ; les pressions qu'elle supporte de haut en bas et de bas en haut sont inégales au premier instant, et leur différence primitive est le poids du filet liquide vertical a, qui a pour base la molécule. Mais, à mesure que le liquide s'écoule, le poids du filet superposé va en décroissant, tandis que l'élasticité du gaz intérieur est augmentée par la diminution de son volume ; en sorte qu'il arrive un moment où, le mercure conservant encore une certaine hauteur x dans le tube, l'équilibre s'établit entre les deux pressions opposées.

Prenons pour inconnue cette hauteur finale x. $a-x$ sera l'abaissement du niveau ; $(a-x)m$ sera le volume de mercure qui est passé dans le vase ; $bn-(a-x)m$ sera donc le volume auquel est réduit l'air intérieur. L'élasticité de ce gaz est devenue, d'après la loi de Mariotte, $\frac{pbn}{bn-(a-x)m}$, et cette force fait équilibre à la pression p de l'atmosphère, augmentée de celle de la colonne x : nous avons donc

$$\frac{pbn}{bn-(a-x)m}=p+x;$$

posant $\frac{n}{m}=q$, et résolvant l'équation, nous trouvons

$$x=-\tfrac{1}{2}(p+bq-a)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(p+bq-a)^2+4ap}.$$

La racine négative x_- doit évidemment être rejetée ; quant à la racine positive x_+, elle n'est admissible que si elle est $<a$. Or, si nous écrivons

$$-\tfrac{1}{2}(p+bq-a)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(p+bq-a)^2+4ap}<a,$$

et si nous simplifions cette inégalité, elle se ramène

à $bq>0$, condition toujours remplie. Ainsi x_+ est toujours moindre que a, et par conséquent x_+ est la hauteur cherchée.

Dans l'exemple numérique, il vient $x_-=-456^{cm}$, et $x_+=4^{cm}$.

Nous avons prouvé que dans le cas général le mercure ne peut s'écouler du tube en totalité. Mais pour voir si l'algèbre ne nous découvrirait point des cas particuliers où le tube doit se vider complétement, faisons $x=0$ dans l'équation du problème, et examinons dans quelles circonstances elle pourrait alors être vérifiée. Pour $x=0$, elle se réduit à

$$\frac{pbn}{bn-am}=p, \qquad \text{ou à } \frac{p}{1-\frac{am}{bn}}=p.$$

On satisferait à cette condition, 1° par $am=0$, 2° par $p=0$, 3° par $bn=\infty$. Dans la première hypothèse la capacité du tube serait nulle, et partant la question ne subsisterait plus : cette hypothèse n'offre donc aucun intérêt. Dans la seconde, le vide existerait au dessus et au dessous du mercure : il ne serait donc pressé que par son poids, et en conséquence son écoulement serait total. Enfin la troisième hypothèse, d'après laquelle la capacité du flacon serait infinie, répond au cas où le liquide tombe dans un volume d'air illimité, c'est-à-dire dans l'atmosphère : donc il doit encore s'écouler complétement.

21. *On a un tube cylindrique* (fig. 5.) *ouvert par les deux extrémités, qui a trois branches parallèles*

maintenues verticalement, dont les deux premières forment un siphon manométrique en partie plein de mercure. On enfonce la troisième branche d'une quantité a *dans un vase qui contient aussi du mercure. Cette immersion donne lieu à une différence* x *de niveau dans les deux premières branches ; où le liquide s'élevait d'abord à la même hauteur. On propose de calculer* x. *La pression* p *de l'atmosphère est connue ; la branche en partie plongée, la courbure supérieure du tube et la portion occupée d'abord par l'air dans la branche intermédiaire, ont des longueurs dont la somme est égale à* m.

Application numérique : $a = 4^{po}$, $p = 28^{po}$, $m = 15^{po}$.

Le tube étant cylindrique, le niveau du mercure s'est abaissé de $\frac{x}{2}$ dans la branche intermédiaire. En outre la différence de niveau du mercure dans le vase et dans la troisième branche doit être la même que dans les deux premières : d'où il résulte que le volume actuel de l'air intérieur est à son volume primitif comme $\frac{x}{2} + m - (a - x)$ est à m. Ainsi, d'après la loi de Mariotte, l'élasticité de cet air, égale d'abord à p, est devenue

$$\frac{pm}{m-a+\frac{3x}{2}}$$

$p+x$ est d'ailleurs une seconde expression de cette élasticité; on a donc

$$\frac{pm}{m-a+\frac{3x}{2}} = p + x. \qquad \text{(A)}$$

d'où l'on déduit

$$x^2+[p+\frac{2(m-a)}{3}]x-\frac{2ap}{3}=0,$$

et

$$x=-\left(\frac{p}{2}+\frac{m-a}{3}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\frac{m-a}{3}\right)^2+\frac{2ap}{3}}.$$

Ces deux racines x_+, x_-, sont de signes contraires. La valeur négative x_- est étrangère à la question; la valeur positive x_+ ne peut y satisfaire que si elle est plus petite que a. Or, par un calcul semblable à celui qui est indiqué au n° précédent, on s'assurerait que cette condition est toujours remplie. Donc x_+ doit être admise.

En partant des nombres donnés, on trouverait $x_+=2^{po}$, et $x_-=-\frac{112^{po}}{3}$.

Tout en rejetant la racine négative, il convient de voir si elle ne pourrait être utilisée. Pour cela il faut, comme on le prescrit en algèbre, changer dans l'équation du problème x en $-x$, et chercher si l'équation ainsi modifiée ne serait pas la traduction d'un problème de physique analogue à celui qu'on traite. Or ce changement de signe introduit dans l'équation (A) la rendrait insignifiante. Mais on tirerait parti de cette dernière si l'on imaginait de remplacer en même temps a par $-a$. Car on aurait

$$\frac{pm}{m-\frac{x}{2}+(a-x)}=p-x,$$

équation qui répond évidemment au cas où la troisième branche du tube, d'abord immergée en partie

dans le vase, serait *soulevée* d'une quantité a. Alors l'air intérieur, au lieu de se condenser, se raréfierait; le mercure, qui avait d'abord le même niveau dans les deux premières branches, s'abaisserait davantage dans la première qui communique avec l'atmosphère; x serait cette différence de niveau, et partant x serait aussi la hauteur du mercure dans la troisième branche au dessus de son niveau dans le vase.

La nouvelle équation peut s'écrire comme il suit:

$$x^2-\left[p+\frac{2(m+a)}{3}\right]x+\frac{2ap}{3}=0.$$

On reconnaît à cette forme que ses deux racines sont positives. En voici les valeurs :

$$x=\frac{p}{2}+\frac{m+a}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\frac{m+a}{3}\right)^2-\frac{2ap}{3}}.$$

Une transformation facile donne

$$x=\frac{p}{2}+\frac{m+a}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\frac{m-a}{3}\right)^2+\frac{4am}{9}}.$$

On conclut de là que ces deux racines sont toujours réelles. Mais laquelle des deux faut-il adopter? Si l'on continue de désigner par x_+ la racine qui répond au signe $+$ du radical, il est clair qu'on a

$$x_+>\left(\frac{p}{2}+\frac{m+a}{3}\right)+\left(\frac{p}{2}+\frac{m-a}{3}\right),$$

$$\text{ou}\quad x_+>p+\frac{2m}{3}.$$

Cette valeur étant *à fortiori* $>p$, on voit que x_+ ne saurait convenir à la question : car nécessairement

le mercure s'élève moins dans la troisième branche que dans le baromètre. x_- est donc la valeur cherchée.

Nous nous sommes étendus sur la question incidente amenée par la discussion qui précède, parce que cette question offrait une particularité remarquable, savoir, celle de *deux racines positives* entre lesquelles on devait choisir. Le choix à faire est indiqué fort simplement par la considération d'une *limite* que la valeur demandée ne peut atteindre.

22. h *et* k *étant les coefficients des dilatations linéaire et cubique d'un corps solide, quelle erreur commet-on lorsqu'en déduisant* h *de* k *on suppose* $h = \frac{k}{3}$?

La valeur exacte de h est $\sqrt[3]{1+k} - 1$. Si donc on fait $h = \frac{k}{3}$, l'erreur commise $e = 1 + \frac{k}{3} - \sqrt[3]{1+k}$. Pour assigner à cette erreur une limite très simple, il suffit de réduire en série $\sqrt[3]{1+k}$. On obtient ainsi

$$h = \sqrt[3]{1+k} - 1 = \frac{k}{3} - \frac{2}{3}\frac{k^2}{6} + \frac{2.5}{3.6}\frac{k^3}{9} - \frac{2.5.8}{3.6.9}\frac{k^4}{12} + \ldots$$

k étant beaucoup plus petit que l'unité, cette série est très convergente. Comme ses termes sont alternativement positifs et négatifs, on aura une valeur un peu trop forte pour h si l'on se borne au premier terme $\frac{k}{3}$, et l'erreur sera moindre numériquement que le second terme $\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2}{6}$ ou $\left(\frac{k}{3}\right)^2$. On a donc $e < \left(\frac{k}{3}\right)^2$.

Donc, *lorsqu'on prend pour coefficient de la dilatation linéaire le tiers du coefficient de la dilatation cubique, l'erreur est moindre que le carré du tiers de ce dernier coefficient.*

Exemple : Dulong et Petit ont trouvé pour le fer $k=\frac{1}{28200}$. On tire de là par l'approximation usitée $h=\frac{1}{84600}$. La valeur rigoureuse de h est $\frac{1}{84746}$ et l'erreur cherchée est plus faible que $\frac{1}{7157160000}$.

23. ***Comment et dans quel sens peut-on charger par influence une bouteille ou un carreau de Leyde au moyen d'un électrophore?***

Quelle est la limite des charges d'électricité que le carreau peut recevoir par ce procédé?

Entrons d'abord dans les détails de l'expérience.

Après avoir électrisé négativement un gâteau de résine R (fig. 6) avec une peau de chat, on pose sur ce gâteau un disque métallique M surmonté d'un manche isolant C, et l'on a soin de faire communiquer le disque avec le sol par une petite bande d'étain E placée entre le métal et la résine. On pose ensuite la *bouteille* ou le *carreau* de Leyde IVS sur le disque M (c'est pour simplifier le dessin que nous figurons de préférence un *carreau.*); puis, tenant d'une main le manche C, on soulève le système MIVS, et lorsqu'on le juge suffisamment éloigné de la résine, on touche de l'autre main le plateau supérieur S du carreau. Après ce contact, qui est pré-

cédé d'une étincelle, on replace MIVS sur R; on enlève de nouveau MIVS, et l'on touche encore S. On recommence ensuite les mêmes opérations un certain nombre de fois. Enfin si, après le dernier contact de S avec le doigt, on prend le carreau par le manche isolant D et qu'on le sépare de M, on trouve que le plateau inférieur I est électrisé positivement, et le plateau supérieur S négativement; que S est un peu moins chargé que I, et que les charges sont d'autant plus fortes qu'il y a eu plus de superpositions et de contacts.

Il s'agit maintenant d'expliquer et de calculer cette expérience d'après les principes connus.

Pendant la première superposition de M sur R, l'électricité neutre de M et de I est en partie décomposée par l'électricité négative de la résine; le fluide négatif provenant de cette décomposition est repoussé et s'écoule dans le sol par la feuille d'étain E, et le fluide positif correspondant est attiré et maintenu sur la surface inférieure de M; en sorte que I n'est pas électrisé, et que S n'est soumis à aucune influence.

Dès que MIVS est soulevé et par conséquent soustrait à l'influence de la résine, le fluide positif de M devenu libre se répand en partie sur I, et à travers la lame de verre V décompose de l'électricité neutre en S. Aussitôt qu'on approche le doigt de S, cette décomposition augmente, et elle atteint son maximum à l'instant du contact. Le fluide positif dû à cette décomposition s'échappe alors dans les organes et dans le sol, et il reste en I une quantité d'électri-

cité négative neutralisée entièrement par la positive de IM. En outre, la plus grande partie de cette dernière se porte sur la face de I contiguë à la lame de verre V. Soit E la quantité de fluide positif fixée en I, ou en d'autres termes la *première charge* de I. l'électricité négative e retenue en S est moindre que l'électricité E qui la neutralise. Posons $e = m$ E, m étant une fraction proprement dite qui dépend de l'épaisseur de la lame isolante V.

Actuellement cherchons le nouvel équilibre qui aura lieu pendant la seconde superposition. L'influence de l'électricité négative de R s'exerçant alors sur le fluide libre de M et de I aussi bien que sur leur fluide neutre, le plateau I perd une portion de son électricité positive E, laquelle portion est attirée sur la surface de M contiguë à la résine, et il ne reste plus sur I qu'une quantité ε d'électricité, dissimulée par le fluide négatif e de S; et, comme à travers la lame V l'électricité neutralisée doit être toujours la même fraction de l'électricité neutralisante, nous aurons $\varepsilon = me$, et par suite $\varepsilon = m^2$E.

Quand MIVS est soulevé pour la seconde fois, et qu'on touche S de nouveau, il se porte sur I la même quantité E de fluide positif que la première fois, puisque la quantité m^2E qui y réside déjà est entièrement dissimulée par m E, et ne saurait exercer d'action répulsive sur l'électricité affluente; de sorte qu'au moment où l'on vient de faire communiquer S avec le sol, il existe sur I une quantité de fluide positif $E' = E + m^2E$, et la nouvelle décomposition de fluide neutre qui vient de s'opérer en S y

détermine une charge totale de fluide négatif $e'=m(E+m^2E)$.

De même soit ε' la quantité de fluide positif qui reste sur I pendant la troisième superposition ; $\varepsilon'=me'=m^2E+m^4E$.

Après la troisième communication de S avec le sol, il vient en I $E''=E+m^2E+m^4E$,
et en S $e''=mE''=m(E+m^2E+m^4E)$.

Enfin après $n+1$ superpositions et $n+1$ contacts, nous avons (1), en I:

$$E^{(n)}=E+m^2E+\ldots\ldots+m^{2n-2}E+m^{2n}E=E\frac{1-m^{2n+2}}{1-m^2},$$

et en S:

$$e^{(n)}=m(E+m^2E+\ldots\ldots+m^{2n}E)=mE\frac{1-m^{2n+2}}{1-m^2}.$$

Les charges respectives $E^{(n)}$, $e^{(n)}$ des deux plateaux croissent en même temps que n. Soit $n=\infty$; elles deviennent

$$E^{(\infty)}=\frac{E}{1-m^2},\quad e^{(\infty)}=\frac{mE}{1-m^2}.$$

Ainsi la charge finale de l'un ou de l'autre plateau a pour limite supérieure sa première charge E ou mE multipliée par le nombre fractionnaire $\frac{1}{1-m^2}$, qui mesure, comme on sait, la *force condensante* du carreau.

24. *Trouver l'expression de la vitesse de refroi-*

(1) On suppose évidemment que, pendant l'opération, le gâteau de résine n'éprouve aucune déperdition d'électricité.

dissement d'un corps de petites dimensions dans une enceinte vide.

Soit θ la température de l'enceinte; soit $\theta+t$ celle du corps; soit v sa vitesse de refroidissement. Cette vitesse v est égale à la vitesse du refroidissement absolu qu'il éprouverait dans un vide illimité, diminuée de la vitesse du réchauffement qu'il doit au rayonnement de l'enceinte. Soit F $(\theta+t)$ la première de ces deux vitesses opposées; F (θ) devra être la seconde, puisqu'il faut que leur différence devienne nulle en même temps que l'excès t de la température du corps. Nous avons donc

$$v = F(\theta+t) - F(\theta).$$

Mais, d'après les expériences de Dulong et Petit, l'expression de v est de la forme $a^{\theta}\varphi(t)$, $\varphi(t)$ représentant une fonction inconnue de t et a une constante égale à $\sqrt[20]{1,165}=1,0077$. Ecrivons donc

$$F(\theta+t) - F(\theta) = a^{\theta}\varphi(t).$$

Telle est l'équation obtenue par Dulong et Petit (1), et qu'il s'agit ici de résoudre sans le secours de l'analyse infinitésimale (2). Pour cela posons d'abord

(1) *Annales de chimie et de physique*, t. VII, p. 251.

(2) M. Cauchy a donné dans son *Cours d'analyse* publié en 1821 des méthodes purement algébriques pour *déterminer des fonctions continues d'une seule variable propres à vérifier certaines conditions*. Le calcul suivant, qui est

$\theta=0$, puis remplaçons t par θ et par $\theta+t$; nous aurons

$$F(t) - F(0) = \varphi(t),$$
$$F(\theta) - F(0) = \varphi(\theta),$$
$$F(\theta+t) - F(0) = \varphi(\theta+t):$$

Si nous retranchons ces deux dernières équations l'une de l'autre, il vient

$$F(\theta+t) - F(\theta) = \varphi(\theta+t)-\varphi(\theta),$$

et par conséquent

$$\varphi(\theta+t) - \varphi(\theta) = a^{\theta}\varphi(t). \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

Après avoir ainsi éliminé la fonction F, posons successivement dans la transformée (A) $t=\theta$, $t=2\theta$, $t=3\theta \ldots\ldots t=(n-1)\theta$. Nous en déduirons l'une après l'autre les relations

$$\varphi(2\theta)=(a^{\theta}+1)\varphi(\theta),$$
$$\varphi(3\theta)=\varphi(\theta)+a^{\theta}\varphi(2\theta)=(a^{2\theta}+a^{\theta}+1)\varphi(\theta),$$
$$\varphi(4\theta)=\varphi(\theta)+a^{\theta}\varphi(3\theta)=(a^{3\theta}+a^{2\theta}+a^{\theta}+1)\varphi(\theta),$$
$$\varphi(n\theta)=\varphi(\theta)+a^{\theta}\varphi([n-1]\theta)=(a^{(n-1)\theta}+a^{(n-2)\theta}\ldots+a^{\theta}+1)\varphi(\theta);$$

$$\text{et } \varphi(n\theta)=\frac{a^{n\theta}-1}{a\theta-1}\varphi(\theta);$$

d'où nous tirons, en égalant $n\theta$ à une constante k,

$$\varphi(\theta)=\frac{\varphi(k)}{a-1}(a^{\theta}-1);$$

une application de ces méthodes, m'a été communiqué par M. Blanchet, agrégé-professeur de physique au collége de Saint-Louis.

et si nous faisons, pour simplifier, $\frac{\varphi(k)}{a^k-1}=m$, nous trouvons $\varphi(\theta)=m(a^\theta-1)$.

On étendrait aisément cette formule aux cas où n, au lieu d'être un nombre entier positif, serait négatif, fractionnaire ou incommensurable (1). On peut d'ailleurs vérifier la généralité de la formule en la substituant dans l'équation (A), ce qui donne

$$m(a^{\theta+t}-1)-m(a^\theta-1)=a^\theta m(a^t-1),$$

équation qui est toujours identique, quelles que soient les valeurs de t, θ et m. Donc enfin la vitesse cherchée $v=m\,a^\theta\,(a^t-1)$, m désignant une constante arbitraire.

(1) Voyez pour ces développements le *Cours d'analyse* de M. Cauchy, 1re partie, chapitre V.

CHAPITRE V.

EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE RÉSOLUS PAR LA TRIGONOMÉTRIE.

25. *Comment pourrait-on étendre à la mesure des forces électriques les indications des électroscopes ordinaires, tels que ceux de Henley et de Saussure* (1)?

1° Considérons un fil métallique très mince, qui serait l'axe d'un cylindre de gomme laque maintenu verticalement, et qui serait terminé supérieurement par une petite boule de métal et inférieurement par une boule encore plus petite de moelle de sureau. Près de l'extrémité supérieure de ce fil soit fixé, à l'aide d'un petit anneau, un autre fil de métal aussi

(1) La prééminence de l'électromètre de Coulomb étant incontestable, cette extension de l'emploi des électroscopes, déjà présentée autrement au n° 5, est théorique plutôt que pratique. C'est donc surtout comme exercice qu'il faut envisager le calcul suivant, que j'ai fait insérer en 1828 dans les *Annales de chimie et de physique* (t. XXXIX, p. 37).

délié, de la même longueur, et qui soutiendrait une boule de moelle de sureau du même diamètre que la première. Dans l'état naturel ces deux boules se toucheront; mais si avec un ***plan d'épreuve*** électrisé l'on touche le bouton supérieur, les deux fils, qui communiquent entre eux par en haut, transmettront aux deux boules légères la même électricité, et la boule mobile s'écartera de la boule fixe, parallèlement à une division circulaire tracée, par exemple, sur une des faces de la cage de verre où ce petit pendule sera renfermé (1). Nous pourrons faire abstraction du peu d'électricité que retiendront les fils, aussi bien que du poids du fil mobile, et n'avoir égard qu'à la répulsion mutuelle des deux petites boules, que nous supposerons réduites à leurs centres. L'écart de la boule mobile sera d'autant plus grand que le plan d'épreuve aura été plus électrisé. Mais on sait que la charge électrique de ce plan n'est pas proportionnelle à l'arc décrit; c'est cette charge qu'il nous faut évaluer en fonction du même arc.

Soit F la force répulsive mutuelle qui s'exercerait entre les deux boules à l'unité de distance; soit p le poids de la boule de sureau; soit l la longueur du fil qui la supporte; nommons θ l'angle que le fil mobile fait avec la verticale, lorsque l'équilibre est établi entre la force répulsive et la pesanteur. La distance actuelle des boules ou la corde de l'arc par-

(1) Cette construction diffère très peu de celle de l'électroscope de Henley.

couru par le sureau sera égale à $2\,l \sin\frac{1}{2}\theta$; et, puisque la répulsion est en raison inverse du carré de la distance, l'expression de cette force sera $\frac{F}{4l^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}$. Pour que la boule demeure en équilibre, il faut qu'il y ait égalité entre $p\sin\theta$, composante de son poids dirigée suivant la tangente à l'arc décrit, et $\frac{F}{4l^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}\times\cos\frac{1}{2}\theta$, composante de la force répulsive dirigée en sens contraire suivant la même droite; c'est-à-dire que nous aurons

$$\frac{F\cos\frac{1}{2}\theta}{4l^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}=p\sin\theta=2p\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta;$$

d'où nous tirerons

$$F=8pl^2\sin^3\tfrac{1}{2}\theta.$$

La force cherchée F est donc proportionnelle au cube du sinus de la moitié de l'angle d'écart. On voit que la même force est sensiblement proportionnelle au cube de cet angle, toutes les fois qu'il est très petit. Ajoutons que dans presque tous les cas cette approximation serait suffisante (1).

2° Imaginons que le fil que nous supposions fixe et couvert de gomme laque soit mis à nu et mobile,

(1) Un autre résultat assez curieux, c'est que la tension du fil, dont l'expression est $p\cos\theta+\frac{F\sin\frac{1}{2}\theta}{4l^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}$, se réduit à p dans le cas d'équilibre, c'est-à-dire qu'elle est égale au poids entier de la boule, comme lorsque le fil est vertical et que cette boule est à l'état neutre.

ou, en d'autres termes, considérons l'électroscope de Saussure. Quand les deux boules de sureau recevront la même électricité, elles s'écarteront l'une de l'autre; et, vu l'égalité de leurs poids p, leurs fils formeront le même angle θ avec la verticale. Leur distance sera alors $2l\sin\theta$, et leur force répulsive $\frac{F}{4l^2\sin^2\theta}$. Pour qu'elle fasse équilibre au poids de l'une quelconque des deux boules, nous devrons avoir

$$\frac{F\cos\theta}{4l^2\sin^2\theta}=p\sin\theta,$$

d'où $$F=4pl^2\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}=4pl^2\sin^2\theta\tang\theta.$$

La force répulsive à l'unité de distance est donc proportionnelle au carré du sinus de la moitié de l'angle d'écart multiplié par sa tangente.

Cette expression se simplifie et se réduit à $4pl^2\theta^3$ ou à $\frac{pl^2}{2}(2\theta)^3$, quand la petitesse de l'angle permet de remplacer $\sin^2\theta$ par θ^2 et $\tang\theta$ par θ; d'où il suit que la force F devient proportionnelle au cube de l'angle des fils.

Cette dernière loi approche d'autant plus de l'exactitude, qu'en posant à la fois $\sin^2\theta=\theta^2$ et $\tang\theta=\theta$, on commet deux erreurs qui marchent en sens contraire l'une de l'autre et tendent à se compenser mutuellement. Il est aisé de prouver que θ^3 diffère de $\sin^2\theta\tang\theta$ d'une quantité moindre que θ^5, ou, en termes généraux, que, *si l'on prend le cube d'un arc plus petit que le rayon pour le produit du carré de son sinus par sa tangente, il en résulte une erreur*

moindre que la cinquième puissance de cet arc (1).

Jusqu'ici nous avons calculé seulement la force F avec laquelle les deux boules se repousseraient à l'unité de distance. On en déduira sans peine le rapport de deux charges électriques e, e', communiquées successivement au système des deux boules par un plan d'épreuve. Car les forces répulsives correspondantes F et F' sont entre elles en raison composée des charges simultanées des deux boules, ou comme $\frac{e}{2}\times\frac{e}{2}$ est à $\frac{e'}{2}\times\frac{e'}{2}$, ou enfin :: $e^2 : e'^2$. Ainsi dans les deux cas traités ci-dessus on a la relation approximative

$$e : e' :: \theta^{\frac{3}{2}} : \theta'^{\frac{3}{2}},$$

(1) *Démonstration de ce principe :*

On a $\tan\theta > \theta$. . . . . (A)

d'où $\sin^2\theta > \theta^2(1-\sin^2\theta)$,

et *à fortiori* $\sin^2\theta > \theta^2(1-\theta^2)$. . . . . (B)

Si l'on multiplie membre à membre les deux inégalités (A) et (B), il vient $\sin^2\theta \tan\theta > \theta^3(1-\theta^2)$,

d'où $\theta^3 - \sin^2\theta \tan\theta < \theta^5$. C. Q. F. D.

Remarque. On tire de l'inégalité (B) $\sin\theta > \theta\sqrt{1-\theta^2}$,

et *à fortiori* $\sin\theta > \theta(1-\theta^2)$. . . . . (C)

Multipliant (B) et (C) membre à membre, on trouve

$$\sin^3\theta > \theta^3(1-\theta^2)^2,$$

d'où $\theta^3 - \sin^3\theta < 2\theta^5 - \theta^7$,

résultat qui se rapporte au cas d'une seule boule mobile, et qui fera connaître le degré d'approximation correspondant aux divers arcs observés.

On obtiendrait pour les deux erreurs précédentes des limites encore plus resserrées, si l'on voulait s'appuyer sur les *séries trigonométriques*.

c'est-à-dire que *les quantités d'électricité libre communiquées successivement aux deux boules d'un électroscope par le même plan d'épreuve sont entre elles à peu près comme les racines carrées des cubes des angles d'écart.* Il est évident que le même rapport existe aussi entre les quantités d'électricité libre que le plan d'épreuve possédait avant d'être mis en contact avec l'appareil.

Le même calcul est applicable à l'évaluation de petites forces magnétiques.

Soit une longue aiguille aimantée mobile sur un pivot ou à l'aide d'un fil de soie non tordu, et qui puisse se maintenir horizontalement. Abandonnée à elle-même, elle se dirigera dans le méridien magnétique. Si l'on approche alors d'un de ses pôles le pôle de même nom d'un aimant long et faible, l'axe magnétique de l'aiguille s'écartera de sa première direction, et s'arrêtera quand il y aura équilibre entre la force directrice du globe et la force répulsive des deux aimants. Supposons qu'au moment de l'équilibre le pôle influent de l'aimant fixe occupe la position initiale du pôle repoussé de l'aiguille. Soit F la force répulsive des deux pôles à l'unité de distance; soit θ la déviation angulaire de l'aiguille; soit l la distance de la pointe du pivot au pôle de l'aiguille; soit enfin H la composante horizontale de l'une des forces du couple terrestre. En ne tenant compte que de l'action réciproque des deux pôles voisins, nous prouverions, comme plus haut, que l'on a

$$\frac{F\cos\frac{1}{2}\theta}{4l^2\sin^2\frac{1}{2}\theta} = 2H\sin\theta; \quad \text{d'où } F = 16Hl^2\sin^3\tfrac{1}{2}\theta;$$

par conséquent même mesure pour la répulsion magnétique que celle que nous avons obtenue dans le premier cas pour la répulsion électrique..... (1).

On concevra aisément que, pour transformer le dernier appareil en *électromètre*, il suffit d'adapter une boule de moelle de sureau à une extrémité de l'aiguille, d'en isoler le pivot, et de la mettre en contact, lorsqu'elle s'est dirigée dans le méridien magnétique, avec une autre boule de sureau fixe et isolée, à laquelle on donne successivement les charges électriques qu'il s'agit de comparer.....

26. ***Quelle est la condition que les angles d'un prisme doivent remplir pour que les images qu'il donne par une réflexion intérieure n'aient pas leurs contours irisés?***

Ce problème, déjà résolu par la géométrie au n° 16, n'est pas plus difficile à résoudre par la trigonométrie.

Soit I un angle d'incidence situé dans un plan ABC (fig. 4) perpendiculaire aux arêtes du prisme. Soit R l'angle de réfraction correspondant à I pour un rayon d'une couleur quelconque X. Nommons A et B les angles que les faces d'incidence et d'émergence forment avec la face de réflexion. Enfin dési-

(1) Voyez plus loin, au n° 8 des *Problèmes de magnétisme*, un énoncé plus général et une solution plus rigoureuse de cette question.

gnons par E l'angle d'émergence du rayon de couleur X. Il est aisé de voir que B—A+R est l'angle intérieur qui donne lieu à l'angle E; d'où il résulte

$$\sin E = l \sin(B-A+R),$$

l étant l'indice de réfraction de la matière du prisme pour la couleur X. Nous avons d'ailleurs $\sin I = l \sin R$. Ces deux relations combinées entre elles nous donnent

$$\sin E = \cos(B-A)\sin I + \sin(B-A)\sqrt{l^2-\sin^2 I}.$$

Or, pour que les images ne soient pas irisées, les rayons émergents de réfrangibilités différentes produits par le même rayon incident doivent être parallèles entre eux, ce qui exige que l'angle E soit indépendant de l'indice l de réfraction. Il faut donc que dans la valeur de sinE le terme qui contient l disparaisse, quel que soit I; ce terme est $\sin(B-A)\sqrt{l^2-\sin^2 I}$; partant la condition demandée est $\sin(B-A)=0$, ou $B=A$, ou, en langage ordinaire, l'égalité des angles adjacents à la face de réflexion : ce que nous avons trouvé plus haut. Dans cette hypothèse il vient $\sin E = \sin I$, c'est-à-dire que les angles d'incidence et d'émergence sont égaux.

Si B n'était pas égal à A, l'angle E varierait d'une couleur à une autre, suivant le degré de réfrangibilité; les divers rayons émergents dus au même rayon incident s'écarteraient donc les uns des autres, ce qui ferait naître des iris; et l'on s'assurerait sans peine que l'angle E aurait la même valeur que si les rayons arrivant sous l'incidence I avaient traversé, sans réflexion intérieure, un prisme dont l'angle ré-

fringent serait égal à B—A. Cette assimilation nous avait déjà été suggérée au n° 16 par des considérations géométriques.

27. ***Lorsqu'un rayon de lumière simple traverse un prisme, quelle est la marche que ce rayon doit suivre pour que sa déviation soit un minimum*** (1)?

Soit BAC (fig. 7) une section perpendiculaire aux arêtes du prisme donné; soient LI un rayon incident, I le point d'immersion, IE le rayon réfracté, E le point d'émergence, EM le rayon émergent; R le point de rencontre des rayons LI, EM, suffisamment prolongés; N le point de rencontre des normales IN, EN menées aux points d'immersion et d'émergence. La ***déviation*** de la lumière n'est autre chose que l'angle aigu ORM ou v formé par le rayon émergent REM avec le prolongement RO du rayon incident LIRO.

Posons

NIR$=u$, NIE$=x$, NEI$=x'$, NER$=u'$, et BAC$=a$:

Nommons l l'indice de réfraction pour l'espèce de rayons simples dont il s'agit; on a

$$\sin u = l \sin x \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

$$\sin u' = l \sin x' \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

(1) Là solution tout à fait élémentaire qu'on va lire a déjà été publiée par l'auteur, en 1831, dans les *Annales de chimie et de physique* (t. XLVII, p. 88).

On trouvera aisément, par la considération des triangles de la figure,

$$x+x'=a, \quad v=(u-x)+(u'-x')=u+u'-a;$$

d'où $$u+u'=v+a.$$

On pourra remplacer (1) et (2) par les équations

$$\sin u+\sin u'=l(\sin x+\sin x'),$$

$$\sin u-\sin u'=l(\sin x-\sin x');$$

ou par celles-ci :

$$2\sin\frac{u+u'}{2}\cos\frac{u-u'}{2}=2l\sin\frac{x+x'}{2}\cos\frac{x-x'}{2},$$

$$2\sin\frac{u-u'}{2}\cos\frac{u+u'}{2}=2l\sin\frac{x-x'}{2}\cos\frac{x+x'}{2},$$

ou enfin par

$$\sin\frac{v+a}{2}\cos\frac{u-u'}{2}=l\sin\frac{a}{2}\cos\frac{x-x'}{2} \quad . \; . \; . \; (3)$$

$$\cos\frac{v+a}{2}\sin\frac{u-u'}{2}=l\cos\frac{a}{2}\sin\frac{x-x'}{2} \quad . \; . \; . \; (4)$$

Il est évident que pour le même prisme le minimum de v correspondra au minimum de $\frac{v+a}{2}$. Or, les angles u, u' étant aigus, on a $u+u'<180°$; d'où $\frac{v+a}{2}<90°$; par conséquent, pour que l'angle $\frac{v+a}{2}$ se réduise à sa moindre valeur, il faut qu'il en soit de même de son sinus. Il s'agit donc de calculer le minimum de $\sin\frac{v+a}{2}$. Écrivons

$$\sin\frac{v+a}{2}=y, \quad \text{et} \quad \sin\frac{x-x'}{2}=z.$$

Ces hypothèses donnent

$$\cos\frac{v+a}{2}=\sqrt{1-y^2},\ \text{et}\ \cos\frac{x-x'}{2}=\sqrt{1-z^2}.$$

On déduira des équations (3) et (4) :

$$l\sin\frac{a}{2}\sqrt{1-z^2}=y\cos\frac{u-u'}{2}=y\sqrt{1-\sin^2\frac{u-u'}{2}}$$

$$=y\sqrt{1-\frac{l^2z^2\cos^2\frac{a}{2}}{1-y^2}},$$

$$l^2(1-y^2)(1-z^2)\sin^2\frac{a}{2}=y^2(1-y^2-l^2z^2\cos^2\frac{a}{2}),$$

et enfin

$$z^2=\frac{(1-y^2)(y^2-l^2\sin^2\frac{a}{2})}{l^2(y^2-\sin^2\frac{a}{2})} \quad \ldots\ldots (5)$$

y^2 ou $\sin^2\frac{v+a}{2}$ étant plus grand que $\sin^2\frac{a}{2}$, le dénominateur de l'expression de z^2 est positif; il en est de même de $1-y^2$. Donc la réalité de z exige qu'on ait $y^2>l^2\sin^2\frac{a}{2}$, ou au moins $y^2=l^2\sin^2\frac{a}{2}$ ou $y=l\sin\frac{a}{2}$. $l\sin\frac{a}{2}$ est donc la valeur minimum de y, auquel cas $z=0$; d'où $x=x'$; on en conclut $u=u'$, et $v=2u-a$.

La déviation du rayon lumineux est donc un minimum quand les angles d'incidence et d'émergence sont égaux, *ou*, ce qui revient au même, *quand le rayon intérieur est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle réfringent du prisme.*

Pour calculer l'angle aigu v, on aura la relation

$$\sin\frac{v+a}{2}=l\sin\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots (6)$$

d'où $$v=2\,\text{arc}(\sin = l\sin\frac{a}{2})-a.$$

Remarque. On déduirait facilement des équations (5) et (6) les deux conséquences que voici :

1° La lumière ne saurait émerger d'un prisme quand son angle réfringent est plus grand que le double de l'*angle limite*, c'est-à-dire de l'angle qui a pour sinus l'unité divisée par l'indice de réfraction.

2° Lorsque l'angle réfringent d'un prisme est double de l'*angle limite*, la lumière ne pourrait sortir de ce prisme que si elle y arrivait sous l'incidence de 90°.

Du reste, ces *conditions d'émergence* sont connues, et l'on peut les établir directement par des considérations fort simples de géométrie.

28. *Trouver la limite du rapport de l'accroissement de l'angle de réfraction à l'accroissement de l'angle d'incidence.*

Soit i un angle d'incidence, et soit r l'angle de réfraction qui en dépend d'après la loi de Descartes. Soit k l'accroissement de l'angle r, correspondant à un accroissement donné h de l'angle i; on a

$$\sin i=l\sin r, \qquad \sin(i+h)=l\sin(r+k).$$

La trigonométrie donne

$$\sin(i+h)-\sin i=2\sin\frac{h}{2}\cos(i+\frac{h}{2}),$$

d'où

$$\frac{\sin(i+h)-\sin i}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cos(i+\frac{h}{2}).$$

La limite du premier facteur du second membre étant 1 pour des valeurs toujours décroissantes de h, et celle du second facteur étant $\cos i$, il s'ensuit que $1\times\cos i$ ou $\cos i$ est la limite du produit. Ainsi, à mesure que h diminue, on approche de plus en plus de l'égalité

$$\frac{\sin(i+h)-\sin i}{h}=\cos i,$$

ou de celle-ci :

$$\sin(i+h)=\sin i+h\cos i.$$

De même, à mesure que k diminue, on approche de l'égalité

$$\sin(r+k)=\sin r+k\cos r.$$

Donc, par le décroissement simultané de h et de k, on approche aussi de l'égalité

$$\sin i+h\cos i=l(\sin r+k\cos r),$$

ou de cette autre :

$$h\cos i=lk\cos r,$$

ou de

$$\frac{k}{h}=\frac{\cos i}{l\cos r}.$$

Donc enfin $\frac{\cos i}{l \cos r}$ sera la limite de $\frac{k}{h}$, c'est-à-dire du rapport des accroissements des angles r et i (1).

C.Q.F.T.

29. *Quelle erreur commet-on lorsqu'en évaluant un angle de réfraction au moyen de l'angle d'incidence, on attribue à ces angles eux-mêmes le rapport constant qui existe entre leurs sinus?*

Désignons par i et par r les angles d'incidence et de réfraction, par l le rapport de leurs sinus, et, dans tout ce qui va suivre, supposons $l > 1$.

Imaginons d'abord que l'angle i soit donné, qu'il s'agisse d'en déduire l'angle r, et qu'au lieu de prendre $\sin r = \frac{\sin i}{l}$, nous cherchions une valeur approchée r' de r, à l'aide de l'équation $r' = \frac{i}{l}$. Voyons comment on peut exprimer en fonction de l et de i l'erreur commise, c'est-à-dire la différence $r' - r$.

D'après une formule connue, nous avons

$$i = \frac{\sin i}{1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 i}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 i}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 i}{7} + \ldots \quad (A)$$

(1) Ce calcul peut servir à dégager des notations différentielles la théorie de l'arc-en-ciel, et même celle des caustiques par réfraction, pourvu toutefois qu'on veuille présenter cette dernière théorie comme l'a fait Petit dans la *Correspondance de l'école polytechnique*, t. II, p. 354. Il serait à désirer qu'on fît descendre dans les éléments toutes les propositions d'*analyse* dont la connaissance est nécessaire au physicien.

Il en résulte pour r', qui est égal à $\frac{i}{l}$,

$$r'=\frac{\sin i}{l}+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 i}{3l}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 i}{5l}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 i}{7l}+\ldots,$$

D'un autre côté, si, dans le développement de r suivant les puissances impaires de son sinus, nous substituons à $\sin r$ sa valeur $\frac{\sin i}{l}$, il vient

$$r=\frac{\sin i}{l}+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 i}{3l^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 i}{5l^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 i}{7l^7}+\ldots.$$

De ces deux dernières séries nous tirons

$$r'-r=\frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2-1}{l^2}\frac{\sin^3 i}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{l^4-1}{l^4}\frac{\sin^5 i}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{l^6-1}{l^6}\frac{\sin^7 i}{7}\ldots\right).$$

Il nous faut conclure de cette équation que la différence $r'-r$ est toujours positive, et que pour les deux mêmes milieux elle dépend de $\sin^3 i$, $\sin^5 i$, $\sin^7 i$..... Il est facile d'obtenir pour $r'-r$ une *limite supérieure* exprimée par un seul terme. En effet nous augmenterons le second membre de notre dernière équation si nous remplaçons les facteurs l^2-1, l^4-1, l^6-1....., par l^2, l^4, l^6..... Par conséquent nous aurons

$$r'-r<\frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin^3 i}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 i}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^7 i}{7}+\ldots\right)$$

$$r'-r<\frac{1}{l}(i-\sin i).\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{B})$$

D'ailleurs la formule

$$\sin i=\frac{i}{1}-\frac{i^3}{1.2.3}+\frac{i^5}{1.2.3.4.5}-\ldots..$$

nous fournit évidemment la relation

$$i - \sin i < \frac{i^3}{1.2.3};$$

nous aurons donc *à fortiori*

$$r' - r < \frac{1}{l}\frac{i^3}{1.2.3}, \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Passons maintenant au cas où c'est r qui est connu, et où l'on pose $i' = lr$, au lieu d'évaluer i rigoureusement par l'équation $\sin i = l \sin r$.

La limite de l'erreur $r' - r$ peut nous servir à déterminer fort simplement celle de l'erreur $i - i'$. En effet, notre inégalité finale revient à celles-ci :

$$\frac{i}{l} - r < \frac{1}{l}\frac{i^3}{1.2.3},$$

$$i - lr < \frac{i^3}{1.2.3},$$

et enfin

$$i - i' < \frac{[\text{arc}(\sin = l\sin r)]^3}{1.2.3}, \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Remarque. On pourrait encore arriver à une seconde limite de $r' - r$ ou de $i - i'$ en partant de la série (A). On la mettrait d'abord sous la forme

$$i - \sin i = \sin^3 i\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^2 i}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin^4 i}{7} + \ldots\right).$$

On en conclurait

$$i - \sin i < \sin^3 i\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots\right),$$

ou

$$i - \sin i < \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\sin^3 i,$$

et, d'après l'inégalité (B),

$$r'-r<\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{\sin^3 i}{l}.$$

On en déduirait

$$i-i'<\left(\frac{\pi}{2}-1\right)l^3\sin^3 r.$$

Mais pour de petites valeurs attribuées soit à i, soit à r, ces deux dernières limites sont plus grandes que les deux premières, et par conséquent se rapprochent moins de la véritable valeur de $r'-r$ ou de $i-i'$.

30. *Quelle erreur commet-on lorsqu'en évaluant un angle de réfraction au moyen de l'angle d'incidence, on attribue aux tangentes de ces angles le rapport qui existe réellement entre leurs sinus?*

1° L'angle i étant connu, soit r'' la valeur approchée de r qu'on obtient en prenant

$$\tang r''=\frac{\tang i}{l}.$$

La relation exacte $\sin r=\frac{\sin i}{l}$ donne

$$\tang r=\frac{\tang i}{\sqrt{l^2+(l^2-1)\tang^2 i}}.$$

Cette expression de $\tang r$ étant évidemment plus petite que $\frac{\tang i}{l}$, on voit d'abord que l'on a $\tang r''>\tang r$, et par conséquent $r''>r$. Pour évaluer l'erreur, on peut se proposer de déterminer une

limite supérieure de $\tang(r''-r)$. On trouverait facilement

$$\tang(r''-r)=\frac{\tang i(\sqrt{l^2+(l^2-1)\tang^2 i}-l)}{\tang^2 i+l\sqrt{l^2+(l^2-1)\tang^2 i}}.$$

Si l'on multiplie les deux termes de cette fraction par $\sqrt{l^2+(l^2-1)\tang^2 i}+l$, et qu'on réduise, il vient

$$\tang(r''-r)=\frac{(l^2-1)\tang^3 i}{l^3(1+\tang^2 i)+(l^2+\tang^2 i)\sqrt{l^2+(l^2-1)\tang^2 i}}. \quad \text{(C).}$$

Le dénominateur de cette expression étant plus grand que $2l^3$, si on le remplace par $2l^3$, on augmentera le second membre de l'équation. On en conclura

$$\tang(r''-r)<\frac{(l^2-1)\tang^3 i}{2l^3}, \quad \text{C. Q. F. T.}$$

Veut-on savoir en outre quelle est celle des deux quantités r'' et r' (n° 29) qui s'approche le plus de r : on s'appuiera sur la formule

$$r''=\frac{\tang r''}{1}-\frac{\tang^3 r''}{3}+\frac{\tang^5 r''}{5}-\ldots\ldots$$

qui deviendra, dans le cas actuel,

$$r''=\frac{\tang i}{l}-\frac{\tang^3 i}{3l^3}+\frac{\tang^5 i}{5l^5}-\ldots\ldots$$

On a d'ailleurs

$$r'=\frac{i}{l}=\frac{\tang i}{l}-\frac{\tang^3 i}{3l}+\frac{\tang^5 i}{5l}-\ldots\ldots$$

On tire de ces deux séries (dont l'emploi suppose nécessairement $i<\frac{\pi}{4}$)

$$r''-r'=\frac{(l^2-1)\tang^3 i}{3l^3}-\frac{(l^4-1)\tang^5 i}{5l^5}+\ldots\ldots$$

Cette différence est toujours positive. Ce résultat combiné avec celui du n° 29 fournit les relations

$$r'' > r' > r.$$

r' diffère donc moins que r'' de la véritable valeur de r.

2° Quand c'est r qui est connu, et que pour en déduire i l'on se contente d'une valeur approchée i'', en posant

$$\tang i'' = l \tang r,$$

on obtient

$$\tang(i - i'') = \frac{l(l^2-1)\tang^3 r}{1+\tang^2 r + (1+l^2\tang^2 r)\sqrt{1-(l^2-1)\tang^2 r}}.$$

(On peut arriver directement à cette expression, ou la conclure de (C), en changeant le signe du second membre et en y remplaçant l par $\frac{1}{l}$ et i par r). Le dénominateur de cette fraction étant plus grand que l'unité, il en résulte

$$\tang(i - i'') < l(l^2-1)\tang^3 r, \quad \text{C. Q. F. T.},$$

et l'on parviendra comme plus haut aux inégalités

$$i > i' > i''.$$

Remarque. Voici une approximation plus grande qu'on emploierait quelquefois avec avantage pour déterminer r en fonction de i.

On partira de la relation

$$\tang r = \frac{\tang i}{\sqrt{l^2+(l^2-1)\tang^2 i}},$$

qu'on écrira ainsi :

$$\tang r = \frac{\tang i}{l}\left(1 + \frac{l^2-1}{l^2}\,\mathrm{n\,g}^2 i\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

En appliquant la formule du binome de Newton $\left(\text{ce qui exige qu'on ait } \tang i < \frac{l}{\sqrt{l^2-1}}\right)$, on aura

$$\tang r = \frac{\tang i}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l^2-1}{l^2}\tang^2 i + \frac{1.3}{1.4}\frac{(l^2-1)^2}{l^4}\tang^4 i - \ldots\right)$$

Les termes de cette série étant alternativement positifs et négatifs, si l'on en prend seulement les deux premiers, on aura une valeur un peu trop faible, et la quantité négligée sera moindre que le troisième terme. Donc enfin en posant

$$\tang r = \frac{\tang i}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{l^2-1}{l^2}\tang^2 i\right),$$

on commettra dans l'évaluation de tang$r$ une erreur plus petite que

$$\frac{1.3}{2.4}\frac{(l^2-1)^2}{l^5}\tang^5 i \text{ (1)}.$$

(1) Cette approximation et d'autres du même ordre, appliquées à la réfraction des surfaces planes ou sphériques, serviraient à substituer aux *caustiques par réfraction* des courbes qui en seraient très voisines dans une certaine étendue et qui auraient les mêmes points de rebroussement. Ces courbes auxiliaires, qu'on peut nommer *pénécaustiques*, sont représentées assez simplement par des équations du 3e degré en coordonnées orthogonales. En faisant dans ces équations $l=-1$, on en déduirait les propriétés des *pénécaustiques par réflexion*. Le lecteur qui voudrait entreprendre ces calculs sans le secours de l'analyse transcendante, pourrait consulter une *Note* que j'ai publiée en 1831 dans les *Annales*

31. *Des rayons incidents de lumière blanche étant supposés perpendiculaires à l'une des faces d'un prisme, quel doit être son angle réfringent* x *pour que la dispersion totale qu'il produit soit égale à un angle donné* v ? *On connaît les indices extrêmes de réfraction* L *et* l *de la matière de ce prisme.*

Il serait facile de trouver l'équation exacte de ce problème. Mais en la transformant pour la résoudre, on serait conduit à une équation complète du 4ᵉ degré. Afin d'éviter cette complication produite par la multiplicité des arcs qui ont le même sinus, je vais me borner à une solution approximative.

Soit Y l'angle aigu qu'un rayon émergent violet forme avec la normale à la face de sortie ; soit y l'angle aigu qu'un rayon rouge émergent fait avec la même normale : $Y-y$ ou l'angle de ces deux rayons est ce qu'on appelle *dispersion totale*. On doit avoir $Y-y=v$.

Si l'angle donné v était très petit, on pourrait prendre (nº 29) $Y=Lx$, $y=lx$; d'où il suivrait $(L-l)x=v$, et $x=\frac{v}{L-l}$.

Mais pour obtenir une approximation moins limitée, je m'appuierai sur les séries qui donnent le sinus d'un arc en fonction des puissances impaires

de mathématiques (tome XXI, page 249) sous ce titre : *Exposition d'une méthode élémentaire propre à obtenir les équations des développées orthogonales et obliques des courbes planes.*

de cet arc, et la relation fondamentale $\sin y = l \sin x$ deviendra

$$\frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots = l\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right).$$

Si je néglige les puissances de x et de y supérieures à la troisième, il reste

$$y - \frac{y^3}{6} = l\left(x - \frac{x^3}{6}\right),$$

et il m'est encore permis de simplifier cette équation en substituant l^3x^3 à y^3 ou bien $\frac{y^3}{l^3}$ à x^3, suivant qu'il s'agit d'exprimer y en fonction de x, ou x en fonction de y. C'est y^3 qu'il faut ici remplacer par l^3x^3, afin d'éliminer y. Il vient (1)

$$y = lx\left(1 + \frac{(l^2-1)x^2}{6}\right).$$

J'aurai de même

$$Y = Lx\left(1 + \frac{(L^2-1)x^2}{6}\right).$$

Je tire de là par soustraction

$$v = (L-l)x + \frac{L(L^2-1) - l(l^2-1)}{6}x^3,$$

ce qui revient à

$$x^3 + \frac{6}{L^2+Ll+l^2-1}x - \frac{6v}{(L-l)(L^2+Ll+l^2-1)} = 0.$$

(1) Cette approximation est du même ordre que celle qui est proposée dans la remarque finale du n° précédent.

Il faut donc résoudre cette équation du troisième degré privée de second terme. Le terme en x étant positif, elle a deux racines imaginaires. Le terme tout connu étant négatif, la racine réelle est positive :

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

telle est l'expression de cette dernière racine, en faisant, pour abréger,

$$\frac{2}{L^2+Ll+l^2-1}=p, \quad \frac{3v}{(L-l)(L^2+Ll+l^2-1)}=q.$$

L'angle cherché est déterminé par cette valeur de x avec une approximation satisfaisante.

CHAPITRE VI.

EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE RÉSOLUS PAR DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

32. *Étant donnés un arc de cercle réflecteur* BAI (fig. 8) *et une droite lumineuse indéfinie* DD′ *située dans son plan, trouver le lieu des foyers conjugués des différents points de cette droite. On connaît le diamètre* 4f *du cercle réflecteur et la distance* CG *ou* a *de son centre à la droite.*

Soit L un des points de la droite; un rayon lumineux LC, émis par ce point et passant par le centre C du cercle, tombe au point I et se réfléchit dans la même direction ICL. Des rayons lumineux partis du même point L, et infiniment voisins du rayon normal LC, se croisent après leur réflexion en un certain point M de LC, et l'on sait que ce point de concours M est le *foyer conjugué* du point L. On sait aussi que, dans le cas indiqué par la figure, on a la relation

$$\frac{1}{IL}+\frac{1}{IM}=\frac{2}{IC}=\frac{1}{f}.$$

Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le centre C du cercle, et pour axes les lignes CX, CY, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la droite donnée DD'. Posons $CP=x$, $MP=y$, $LG=b$. Il en résulte

$$IL=2f+\sqrt{a^2+b^2}, \quad IM=2f-\sqrt{x^2+y^2},$$

et

$$\frac{1}{2f+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{2f-\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{f}.$$

Pour rendre cette équation indépendante de l'ordonnée $-b$ du point L, éliminons b à l'aide de l'égalité

$$\frac{b}{a}=\frac{y}{x},$$

qui nous est fournie par la similitude des triangles LCG et MCP. Il vient

$$\frac{x}{2fx+a\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{2f-\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{f},$$

et après les réductions

$$\sqrt{x^2+y^2}=f\left(1-\frac{x}{a}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Le lieu cherché des points tels que M est donc une courbe du second degré; et, comme le ***rayon vecteur*** CM ou $\sqrt{x^2+y^2}$ est une fonction rationnelle de l'abscisse x, on voit que le centre C du cercle est un des foyers ou le foyer de la courbe, et que CX est son grand axe, ou son axe transverse, ou enfin son axe principal.

La figure 9 se rapporte au cas où la distance *a* est comprise entre *f* et 2*f*, c'est-à-dire où la droite lumineuse est située dans l'intérieur de la circonférence, au delà du centre C de l'arc réflecteur BAI, et plus loin de C que C ne l'est du foyer principal F. La courbe demandée est alors une ellipse dont les éléments sont faciles à déterminer. La partie HSH' de cette ellipse est un lieu de foyers conjugués *réels*, et répond à la réflexion opérée sur la demi-circonférence YAY'. La portion ES'E' est un lieu de foyers *virtuels*, et naît de la réflexion que l'arc de cercle EA'E' produit sur les rayons tels que LI' émis par la portion *intérieure* EE' de la droite. Enfin la partie intermédiaire (EH, E'H') de la courbe, est un lieu de foyers *virtuels* et est formée par les rayons qui viennent des parties *extérieures* ED, E'D', et qui se réfléchissent sur la convexité des arcs EY, E'Y' (1).

J'omets ici la démonstration de toutes ces particularités, afin d'éviter de trop longs détails. Je laisse également au lecteur à discuter l'équation (α), et me bornerai à lui signaler les points essentiels de cette discussion.

On peut supposer 1° $a=2f$ ou $a>2f$, ce qui donne encore une ellipse.

(1) La partie HSH' de l'ellipse est celle qui résout directement le problème, tel que nous l'avons envisagé pour le mettre en équation. Les deux autres parties de la courbe satisfont aussi à la question, mais considérée sous d'autres points de vue. Ce sont des solutions indirectes dues à la généralité de l'analyse.



2° $a=f$, ce qui conduit à une parabole.

3° $a<f$; on obtient une hyperbole.

4° $a=\infty$; on trouve une circonférence de cercle dont le centre est C, et dont le diamètre est $2f$.

5° enfin $a=0$; la droite lumineuse est elle-même le lieu cherché.

Pour que les résultats de ce problème s'appliquent utilement à la catoptrique, il faut restreindre l'énoncé, et concevoir la ligne lumineuse réduite à une longueur GL très petite relativement au diamètre du cercle. On imaginera ensuite que cette droite GL tourne autour de l'axe CA, ainsi que l'arc réflecteur AI et l'arc *focal* MS. Cette rotation engendrerait un petit cercle lumineux, un miroir sphérique et une surface de révolution du second degré. *L'image* de chaque point L coïnciderait sensiblement avec son foyer conjugué M, si l'œil du spectateur était placé très près de l'axe du miroir. Il suit de là que, dans le cas que j'ai traité spécialement, l'image du cercle lumineux présentée par le miroir concave serait une zone d'ellipsoïde de révolution. Cette zone étant fort petite, on peut sans erreur grave la confondre avec un cercle de même base qui lui serait tangent en son sommet, ce qui est l'approximation dont on se contente dans les traités de physique.

33. *Un vase, dont la surface intérieure* Y *est de révolution, tourne uniformément autour de son axe* AZ, *qu'on suppose vertical. Quelle devrait être la nature de la surface* Y *pour qu'une molécule pesante posée sans vitesse initiale en un point quelconque*

M *des parois intérieures décrivit le parallèle mené par ce point, comme si elle était fixée au vase tournant?*

La molécule étant sollicitée à un instant quelconque (fig. 10) par la force centrifuge MF et par la pesanteur MG, la résultante MR de ces deux forces doit être normale à la surface Y pour que la molécule ne s'élève ni ne s'abaisse sur Y, ou, en d'autres termes, pour qu'elle soit dans l'état d'équilibre qui se concilie avec le mouvement du système. Par conséquent il faut que la résultante MR soit normale en M à la courbe méridienne OMS.

Soit g l'intensité MG de la pesanteur; soit x la distance MP du point M à l'axe AZ; soit t le temps que le vase emploie à faire une révolution entière autour de AZ: l'expression de la force centrifuge MF sera $\frac{4\pi^2 x}{t^2}$. Prenons pour inconnue la longueur PN, c'est-à-dire la sous-normale comptée sur l'axe AZ. La similitude des triangles PMN, FMR, nous fournit la proportion

$$\text{PN} : \text{MP} :: \text{FR} : \text{FM},$$

ou

$$\text{PN} : x :: g : \frac{4\pi^2 x}{t^2},$$

d'où nous tirons

$$\text{PN} = \frac{gt^2}{4\pi^2},$$

valeur indépendante de x. La sous-normale est donc constante, propriété qui caractérise une parabole

dont l'axe principal coïncide avec l'axe fixe, et dont le sommet est en un point quelconque de cet axe. Donc enfin *la surface intérieure du vase est un paraboloïde de révolution* (1).

Comme on a seulement le demi-paramètre $\frac{gt^2}{4\pi^2}$ de la courbe méridienne ou génératrice, une condition de plus est nécessaire pour la détermination complète de cette courbe. Par exemple, on pourrait assujettir la parabole à passer par un point M, dont on connaîtrait la distance d à l'axe AZ et la hauteur h au dessus d'une ligne horizontale donnée AX. Si l'on choisissait AX et AZ pour axes des coordonnées x et z, l'équation de la parabole serait

$$x^2-d^2=\frac{gt^2}{2\pi^2}(z-h).$$

En outre si l'on concevait par le point A un axe des y perpendiculaire au plan ZAX, on aurait pour l'équation du paraboloïde demandé

$$x^2+y^2-d^2=\frac{gt^2}{2\pi^2}(z-h).$$

34. *Quelle est la direction que l'homme doit don-*

(1) Ce résultat est semblable à celui qu'on obtient pour une masse liquide pesante qui tourne uniformément autour d'une droite verticale. Par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, et avec la même figure, on trouverait que dans ce mouvement la surface libre du liquide ne peut conserver une forme constante que lorsqu'elle est creusée en paraboloïde de révolution.

ner à ses pieds (supposés réduits à leurs axes) pour que l'aire du trapèze de sustentation soit un maximum ?

Soit p la longueur du pied, ou, en d'autres termes, la longueur commune des deux côtés non parallèles du trapèze. Prenons pour axe des x la droite qui joint les talons, et pour origine des coordonnées rectangulaires l'une des extrémités de cette ligne, savoir, l'extrémité située vers la gauche. Nommons a la distance connue et constante qui sépare les talons. Pour que le quadrilatère de sustentation soit un trapèze, il faut que les axes des pieds forment des angles égaux avec la ligne a. Il suffit donc de déterminer la direction de l'un de ces axes, de l'axe du pied droit, par exemple, ou, ce qui revient au même, la position de son extrémité antérieure M, c'est-à-dire de la pointe du pied droit. Ce point M doit d'abord se trouver sur une circonférence de cercle dont l'équation est

$$(x-a)^2+y^2=p^2. \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

Cherchons l'équation d'une seconde courbe sur laquelle le point M doive aussi être situé pour que le trapèze soit équivalent à un carré b^2, que nous supposerons connu. Cette dernière condition est exprimée par l'équation

$$xy=b^2.$$

Donc le point demandé M se trouve sur une hyperbole équilatère ayant les axes des coordonnées pour asymptotes, et dont le demi-axe est la diagonale

$b\sqrt{2}$ du carré donné b^2. x et y devant être positifs, bornous-nous à considérer celle des deux branches hyperboliques qui s'étend dans l'angle des coordonnées positives. Cette branche pourra successivement couper le cercle en deux points, le toucher, et enfin ne plus le rencontrer, si, en partant d'une valeur très petite assignée à $b\sqrt{2}$, on fait croître de plus en plus cette diagonale ou le carré b^2. Or, le point M ne pouvant être construit qu'autant qu'il est commun au cercle et à l'hyperbole, on voit que le *maximum* de b^2 ou de l'aire du trapèze correspond au contact de ces deux courbes. Les équations de leurs tangentes sont (en désignant les coordonnées courantes par X et Y):

$$Y-y=-\frac{x-a}{y}(X-x), \qquad Y-y=-\frac{y}{x}(X-x).$$

Pour le point (x, y) de contact des deux courbes, nous avons

$$-\frac{x-a}{y}=-\frac{y}{x},$$

ou

$$y^2=x^2-ax. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (D)$$

Cette équation, combinée avec (C), donne

$$x^2-ax=p^2-(x-a)^2;$$

d'où nous tirons

$$x^2-\frac{3a}{2}x+\frac{a^2-p^2}{2}=0,$$

et

$$x=\frac{3a}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{a^2+8p^2}.$$

Celle des deux valeurs de x qui répond au signe — du radical doit être rejetée, si elle est positive, parce qu'elle est plus petite que a, ce qui, d'après l'équation (D), rendrait y imaginaire; et si elle est négative, ce qui a lieu pour $a<p$, il est évident qu'elle doit pareillement être exclue. C'est donc l'autre valeur de x, ou x_+, qui satisfait à la question.

Je ne m'arrêterai pas à calculer la valeur de y, non plus que celle de l'aire *maximum*.

Je remarquerai que la forme

$$\frac{3a}{4}+\frac{a}{4}\sqrt{1+\frac{8p^2}{a^2}},$$

sous laquelle on peut écrire la valeur convenable de x, indique visiblement qu'à mesure que la distance a augmente, x converge vers a. Ainsi pour que l'aire de sustentation soit un *maximum*, il faut que les pieds s'approchent d'autant plus du parallélisme qu'ils s'éloignent plus l'un de l'autre.

Si l'on fait $a=0$, il vient $x=\frac{p}{\sqrt{2}}$; d'où l'on déduit que, si les talons se touchent, l'angle des pieds doit être droit pour former le *triangle maximum* de sustentation, ce qui résulte d'ailleurs d'un théorème connu de géométrie.

35. *Sur la droite qui joint deux points lumineux* A *et* B (fig. 11), *quel est le point* M *où la somme des quantités de lumière reçues est un minimum? On*

suppose que b *et* c *soient les intensités des deux lumières à l'unité de distance* (1).

Soit a la distance mutuelle des deux points A et B; soit x la distance du point cherché M à l'un d'eux, par exemple au point A, et soit s la somme des quantités de lumière qui doit être un *minimum*, et qu'on regardera d'abord comme connue. En partant de ce que les intensités d'une lumière à diverses distances sont en raison inverse des carrés de ces distances, on est conduit à l'équation

$$\frac{b}{x^2}+\frac{c}{(a-x)^2}=s.$$

On peut lui substituer l'ensemble des équations

$$y=\frac{b}{x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C),$$

$$y=s-\frac{c}{(a-x)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D),$$

y et x désignant dans chacune d'elles des coordonnées rectangulaires rapportées aux axes AY et AX.

(1) La solution de ce problème et celle du précédent, qui sont fondées sur la considération du contact des courbes, font partie d'un *Mémoire* que j'ai publié en 1831 sur la détermination élémentaire des *maxima* et *minima* des fonctions algébriques (*Annales de mathématiques* de M. Gergonne, t. XXII).

L'équation (C) caractérise une *hyperbole cubique*, qui a pour asymptotes les deux axes, et dont les deux branches sont situées au dessus de l'axe des x, l'une à la droite de l'axe des y et l'autre à la gauche de cet axe.

L'équation (D) appartient à une courbe de même nature, qui a pour asymptotes une parallèle à l'axe des y menée à la droite de l'origine, à une distance a de cet axe, et une parallèle à l'axe des x élevée au dessus de ce dernier axe d'une quantité s. Les deux branches de cette courbe s'étendent au dessous de leur asymptote horizontale, et s'abaissent symétriquement par rapport à leur asymptote verticale (1).

Il est évident que les branches droites des deux courbes se couperont toujours en un point, et qu'il en sera de même de leurs branches gauches. Les abscisses de ces points d'intersection, étant l'une plus grande que a et l'autre négative, répondront à des points situés sur les prolongements de la ligne AB qui joint les deux lumières. Ainsi, quelle que soit la somme s, il y aura toujours deux points placés l'un à la droite des deux points lumineux, l'autre à leur gauche, qui recevront la quantité de lumière donnée.

Quant à la branche droite de la courbe (C) et à la branche gauche de la courbe (D), elles se rencontreront en deux points, si l'ordonnée de la courbe

(1) Le lecteur est invité à tracer lui-même les figures dont il est ici question.

(D) à l'origine, ordonnée égale à $s-\frac{c}{a^2}$, a une valeur assez grande pour qu'il y ait intersection. Si donc cette condition est remplie, il y aura, entre les deux lumières, deux points qui satisferont encore à la question. Mais si l'on fait décroître s et par conséquent $s-\frac{c}{a^2}$, l'intersection pourra se changer en contact; et, pour toute valeur de s plus petite que celle qui donne naissance à ce contact, les deux branches dont il s'agit ne se rencontrant plus, il n'existerait entre les deux points lumineux, sur la ligne qui les joint, aucun point qui reçût de leur ensemble une si faible quantité de lumière. Il suit de là que, si les deux hyperboles se touchent, la projection M de leur point de contact sur l'axe des x est le point où la somme des intensités des deux lumières atteint son *minimum*.

En appelant X et Y les coordonnées courantes, on trouvera facilement pour les équations des tangentes aux deux courbes (C) et (D) en un point (x,y),

$$Y-y=-\frac{2b}{x^3}(X-x), \qquad Y-y=-\frac{2c}{(a-x)^3}(X-x).$$

Si les deux courbes se touchent, les équations des tangentes qui leur sont menées par leur point de contact (x,y) doivent être identiques. Il faut donc que l'on ait

$$-\frac{2b}{x^3}=-\frac{2c}{(a-x)^3},$$

ou bien

$$\left(\frac{x}{a-x}\right)^3=\frac{b}{c};$$

d'où

$$\frac{x}{a-x}=\sqrt[3]{\frac{b}{c}},$$

et par suite

$$x=\frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$$

Cette valeur est celle de l'abscisse cherchée; et, pour le *minimum* de la somme des quantités de lumière reçues, il vient après les réductions

$$s=\frac{(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3}{a^2}.$$

Remarque. Dans certains problèmes qu'on nomme *indéterminés*, tels que ceux des n°s 32 et 33, les *lieux géométriques* sont les *inconnues principales*; tandis qu'ils ne sont que des *inconnues auxiliaires* dans les problèmes *déterminés*, tels que ceux des n°s 34 et 35. Il est clair que dans le deuxième cas il ne faut recourir aux *lieux géométriques* que s'ils renferment la solution la plus simple ou la plus élémentaire de la question proposée.

CHAPITRE VII.

EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE RÉSOLUS PAR DES FORMULES EMPIRIQUES.

Ce chapitre est la continuation du précédent. Car l'idée la plus nette qu'on puisse se faire d'une formule empirique, c'est de la regarder comme l'équation d'un *lieu géométrique* donné par l'expérience. Lorsqu'un effet susceptible de mesure dépend d'une cause dont l'intensité varie progressivement, la marche du phénomène obéit généralement à une certaine loi de continuité, et peut en conséquence être représentée par une ligne droite ou courbe. Prenons pour exemple les dilatations d'un corps chauffé de plus en plus. Concevons 1° que sur une ligne horizontale indéfinie on marque des longueurs ou *abscisses* proportionnelles aux températures, en partant d'un point fixe ou *origine* qui figure le zéro de l'échelle thermométrique ; 2° qu'aux extrémités de ces abscisses on élève des perpendiculaires ou *ordonnées* proportionnelles aux dilatations correspondantes ; 3° que par les extrémités supérieures de ces ordonnées suffisamment rapprochées on fasse passer

une ligne continue : la forme de cette ligne rendra sensible aux yeux la loi des dilatations du corps. Si la ligne est droite, il s'ensuivra que les dilatations sont exactement proportionnelles aux températures dans l'intervalle des observations. Si elle est courbe, cette proportionnalité n'existera pas. Si la courbe tourne sa convexité vers l'axe horizontal, c'est que les dilatations croîtront plus rapidement que les températures; et le contraire aura lieu si la concavité de la courbe regarde cet axe.

Quand cette construction est achevée, il convient de l'interpréter et de la compléter par le secours du calcul. A l'inspection de la courbe, on tâchera d'en deviner la nature. Supposons que cette courbe passe par l'origine et qu'elle ressemble à une portion de parabole du second degré. On prendra l'équation générale

$$y=at+bt^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P),$$

t désignant la température, y l'effet qui en dépend, a et b deux coefficients numériques ou *constantes* qu'il faut déterminer. Parmi les *couples d'observations*

$$(y',t'), (y'',t''), (y''',t'''), (y^{\text{IV}},t^{\text{IV}}), (y^{\text{V}},t^{\text{V}})$$

qui auront dû être notés, on en choisira deux, (y',t'), (y'',t''), et les équations de condition

$$t'a+t'^2b=y';$$

$$t''a+t''^2b=y'';$$

serviront à calculer a et b (1). Pour vérifier l'aptitude de l'équation (P) à caractériser la courbe, on devra ensuite y remplacer t par t''', t^{iv}, t^{v}....., et voir si les nombres qui en résultent pour y sont respectivement égaux à y''', y^{iv}, y^{v}..... Si cette égalité a lieu rigoureusement ou approximativement, on en conclura que (P) est l'équation exacte ou approchée de la courbe. Mais si l'on trouve une différence notable entre les valeurs de y calculées et les valeurs observées, on en inférera qu'on s'est trompé sur la nature du lieu géométrique dont il s'agit. On rejettera donc l'équation (P), et l'on essaiera l'équation d'une hyperbole soit équilatère, soit quelconque, ou d'une parabole cubique, ou d'une logarithmique....., jusqu'à ce qu'on ait rencontré l'équation qui s'accorde le mieux avec l'expérience, ou, en d'autres termes, la meilleure *formule empirique*. Ce mode de calcul est appelé *interpolation*.

Dans tous les cas on évaluera les coefficients numériques à l'aide d'autant de couples d'observations qu'on emploiera de ces coefficients. On peut essayer des formules à 2, 3 ou 4 constantes au plus, suivant la nature du sujet et le nombre des couples dont on dispose. Il semble au premier abord qu'il y ait beau-

(1) C'est pour me renfermer dans des considérations élémentaires que j'omets ici la *méthode des moindres carrés*. Du reste cette méthode est très laborieuse; et, quand elle est appliquée aux expériences de physique, le faible surcroît d'exactitude qu'elle donne ne compense pas, à mon avis, la longueur des calculs dans lesquels elle entraîne.

coup d'avantage à multiplier les constantes, parce que cela revient à se donner un plus grand nombre de points de la courbe cherchée. Mais il faut craindre un excès de complication dans les calculs, et d'ailleurs il arrive souvent que les formules les plus simples sont aussi les plus exactes.

Le choix des couples ou systèmes de valeurs adoptés pour déterminer les constantes exerce beaucoup d'influence sur l'exactitude des formules empiriques. En général ces couples doivent être espacés convenablement, c'est-à-dire être situés, les uns vers les extrémités de la série des expériences, les autres vers le milieu. Il faut aussi qu'on les prenne parmi ceux qui ont été obtenus dans les circonstances les plus favorables à l'observation. Quelquefois plusieurs tâtonnements sont nécessaires pour manifester les couples les plus propres à servir de points de départ.

Les formules empiriques ne peuvent être appliquées avec certitude que dans l'intervalle des observations dont on a fait usage pour évaluer leurs constantes. Souvent la forme des équations suffit pour montrer qu'elles ne sauraient s'étendre au delà de certaines limites. Il ne faut pas négliger cet avertissement donné par l'algèbre. Telle formule qui représenterait assez fidèlement les changements de volume de l'alcool entre 0° et 78° pourrait faire croire, si l'on en poussait l'emploi un peu loin au dessous de 0°, que l'alcool refroidi de plus en plus acquiert un maximum de densité, vers —50° par exemple, et se dilate ensuite au dessous de ce terme,

ce qui serait contraire à la réalité (1). D'un autre côté il existe des équations empiriques dont la forme indique qu'il *serait possible* qu'elles ne fussent en défaut dans aucune circonstance. Mais ce n'est qu'avec une judicieuse réserve qu'on doit s'appuyer sur cette probabilité, et dans ce cas il faut recourir à quelques vérifications indirectes pour justifier l'extension d'une formule hors de ses limites originelles.

On trouve souvent plusieurs formules qui expriment une série d'expériences à peu près avec le même degré d'approximation. Cela revient à dire qu'entre certaines limites la courbe qui trace la marche du phénomène observé s'approche beaucoup de plusieurs courbes qui ont des points communs avec elle et qui sont très voisines les unes des autres dans une partie de leur cours. Mais comme ces mêmes courbes peuvent ensuite s'éloigner de plus en plus les unes des autres, il s'ensuit qu'ordinairement leurs équations cessent de s'accorder entre elles à partir d'un certain terme que les observations

(1) Cette remarque s'adresse surtout aux formules paraboliques du second et du troisième degré

$$y = at + bt^2, \qquad y = at + bt^2 + ct^3,$$

et aux exponentielles paraboliques

$$y = Am^{at+bt^2}, \qquad y = Am^{at+bt^2+ct^3},$$

formules dont on a souvent abusé.

n'ont pas atteint, et dès que cette discordance se manifeste, elle augmente l'incertitude qu'on éprouverait si, ne connaissant qu'une seule de ces formules, on voulait en étendre l'emploi hors de l'intervalle des observations. Quelquefois on diminue les chances d'erreur en prenant des moyennes entre les nombres correspondants tirés de deux formules. C'est ce qu'on doit faire quand on a quelque raison de penser que l'une des courbes caractérisées par ces deux équations s'élève ou s'abaisse trop rapidement par rapport à l'axe des abscisses, tandis que l'inverse paraît avoir lieu pour l'autre courbe.

J'ai dit, en commençant, qu'on était guidé dans le choix d'une équation par un tracé préalable. Mais on peut se dispenser très souvent de ce tracé. Car les indications qu'il fournit sont un peu vagues, hors le cas assez rare où la ligne qu'on obtient a un genre de courbure nettement prononcé; et d'ailleurs la véritable forme de la courbe n'est pas facile à saisir si le nombre des points connus par où elle doit passer est insuffisant. Quand on a acquis l'habitude du *calcul empirique*, l'analogie ou même une sorte d'instinct conduit à des formules très heureuses, sans qu'on se soit donné la peine de *construire* d'avance les observations qu'on veut interpoler.

36. *Trouver une relation empirique entre les températures indiquées par le thermomètre à mercure et les températures correspondantes mesurées par les dilatations absolues de l'air sec. On connaît le*

tableau comparatif suivant, qui a été formé par Dulong et Petit (1) :

Degrés du thermomètre à air sec corrigé de la dilatation du verre.	Degrés du thermomètre à mercure à envelop-pe de verre.
—36°	—36°
0	0
100	100
148,70	150
197,05	200
245,05	250
292,70	300
350,00	360

Les thermomètres à air et à mercure étant d'accord entre —36° et 100°, la question ne concerne que les températures supérieures à 100°. Comme la table donnée ne renferme qu'un petit nombre de températures corrélatives, une interpolation est nécessaire pour que des résultats observés entre 100° et 350° on puisse déduire autant de résultats intermédiaires qu'on voudra.

(1) *Annales de chimie et de physique*, t. VII, p. 118.

Soient deux thermomètres, l'un à mercure et l'autre à air, gradués de manière qu'ils marquent ensemble 0° et 100°. Je désigne par t le nombre de degrés dont le thermomètre à mercure s'élève au dessus de 100°, au moment où le thermomètre à air indique θ degrés au dessus de 100, c'est-à-dire que je compte les températures t et θ à partir de 100°. Je suppose que t et θ soient liés entre eux par la relation

$$t=a\theta+b\theta^2,$$

et je détermine les constantes a et b par les deux couples d'observations

$$\begin{cases} t=100 \\ \theta=97,05 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=260 \\ \theta=250. \end{cases}$$

Je trouve

$$a=1,0243\,; \qquad b=0,0000628,$$

et par conséquent

$$t=1,0243\theta+0,0000628\theta^2. \quad . \quad : \quad \text{(P)}.$$

J'essaie encore la formule

$$t=\frac{a\theta}{b-\theta},$$

dont je calcule les coefficients à l'aide des mêmes couples. Il vient

$$a=\frac{39767}{2,33}, \qquad b=\frac{38820}{2,33},$$

et

$$t = \frac{397670}{38820 - 2{,}33\theta} \dots\dots \text{(H)}.$$

Si je développe $\frac{a\theta}{b-\theta}$ en série, j'obtiens

$$t = a\left(\frac{\theta}{b} + \frac{\theta^2}{b^2} + \frac{\theta^3}{b^3} + \frac{\theta^4}{b^4} + \dots\right),$$

série qui est une progression géométrique dont la raison est $\frac{\theta}{b}$, et qui par suite est convergente tant que j'ai $\frac{\theta}{b} < 1$, ou $\theta < b$. En passant des lettres aux nombres, j'aurai pour (H)

$$t = 1{,}02439\theta + 0{,}0000615\theta^2 + 0{,}00000000369\theta^3 + \dots$$

Les deux premiers termes de cette série étant très peu différents des deux termes du second membre de (P), on peut prévoir l'accord de (H) avec (P). Reste à savoir si les deux formules s'accordent aussi avec l'expérience. Cette vérification est l'objet du tableau qui suit :

Degréa du thermomètre à air corrigé de la dilatation du verre.	DEGRÉS DU THERMOMÈTRE A MERCURE (1)		
	Observés par Dulong et Petit.	Calculés d'après (P).	Calculés d'après (H).
100	100	100	100
148,70	150	150,03	150,034
197,05	200	200	200
245,05	250	249,896	249,893
292,70	300	299,715	299,71
350	360	360	360

L'écart *maximum* n'est que de 0°,285 pour l'une des formules et de 0°,29 pour l'autre. Elles sont donc également admissibles. Je n'ai pas besoin de prévenir qu'il ne faudrait pas les employer au-dessous de 100°.

Si l'on voulait calculer θ en fonction de t au moyen de l'équation d'une parabole, on pourrait résoudre (P) par rapport à θ, ou bien, en partant des mêmes couples, on écrirait

$$\theta = at + bt^2,$$

(1) La formule (P) est aussi simple et plus exacte que celle dont M. Avogadro s'est servi dans son *Mémoire sur la tension de la vapeur mercurielle* (*Annales de chimie et de physique*, t. XLIX, p. 387).

et l'on trouverait

$$a=0{,}9761, \qquad b=-0{,}000056,$$

et par conséquent

$$\theta=0{,}9761t-0{,}000056t^2 \; . \; . \; . \; . \; (P').$$

(H) a sur (P) l'avantage de donner immédiatement θ en fonction rationnelle de t. L'équation (H), résolue par rapport à θ, prend la forme

$$\theta=\frac{38820t}{39767+2{,}33t}.$$

On reconnaîtrait sans peine que (P′) satisfait à l'ensemble des observations avec la même fidélité que (H). Les formules (P), (H) et (P′) permettent donc de traduire avec une grande approximation les degrés du thermomètre à air en degrés du thermomètre à mercure et réciproquement.

37. *Déterminer une relation empirique entre les elasticités de la vapeur d'eau au dessus de* 100° *et les températures correspondantes marquées par le thermomètre à air.*

Première solution. MM. Dulong et Arago ont exprimé l'élasticité de la vapeur d'eau au dessus de 100° par la formule

$$y=(1+0{,}7153x)^5 \; . \; . \; . \; . \; . \; (B);$$

y désigne ici l'élasticité évaluée en atmosphères de

$0^m,76$, et x la température comptée à partir de 100° sur l'échelle du thermomètre à mercure, l'intervalle de 100° étant pris pour unité.

Il suffirait, pour résoudre le problème, de faire $x=\frac{1}{100}t$, et de remplacer t par l'une ou l'autre de ses valeurs en fonction de θ obtenues au n° précédent. Mais la transformée de (B) serait trop compliquée. Il vaut mieux conserver à (B) sa forme et ne modifier que le coefficient 0,7153. Ce coefficient a été calculé d'après le terme le plus élevé des observations

$$(x=1{,}2415 \qquad y=23{,}934).$$

Or, d'après la formule (H) du n° 36, $224^\circ,15$ du thermomètre à mercure se réduisent à $220^\circ,32$ du thermomètre à air. Si donc je pose

$$\frac{\theta}{100}=z \text{ et } y=(1+az)^5,$$

j'aurai pour déterminer la nouvelle constante a le couple de valeurs

$$(z=1{,}2032 \qquad y=23{,}934),$$

et par suite l'équation de condition

$$23{,}934=(1+1{,}2032a)^5.$$

J'en tire

$$a=0{,}7373,$$

et

$$y=(1+0{,}7373z)^5 \;.\;.\;.\;.\;(b).$$

Telle est l'expression cherchée, où z est la température comptée à partir de 100° sur l'échelle du thermomètre à air, l'unité de température valant 100° de ce thermomètre.

Toutefois, avant d'adopter la formule (b), il est nécessaire d'en constater l'accord avec la série des expériences. On reconnaitrait que cet accord est très satisfaisant, en appliquant (b) aux 11 couples d'observations (1) que MM. Dulong et Arago ont employés pour vérifier leur formule (B). Le lecteur qui voudrait faire ces calculs devrait avoir soin de traduire les températures observées en degrés du thermomètre à air ; la formule (H) du n° 36 lui servirait à cet usage.

Seconde solution. L'élasticité de la vapeur aqueuse au dessus de 100° peut aussi être représentée par la formule

$$\log y = \frac{5{,}247t}{348{,}23+t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(L)},$$

t ayant la même signification qu'au n° précédent, et y étant la même notation que dans (B). Les constantes de (L) ont été calculées à l'aide des systèmes de valeurs

$$\begin{cases} t = 33°{,}3 \\ y = 2^{at}{,}8705 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 124°{,}15 \\ y = 23^{at}{,}934. \end{cases}$$

Cette formule, appliquée aux 11 couples d'observa-

(1) *Annales de chimie et de physique*, t. XLIII, p. 108.

tions indiqués plus haut, satisfait à leur ensemble à peu près aussi exactement que (B), comme on peut s'en assurer. Cela posé, je vais démontrer *à priori* qu'en combinant (L) avec la formule (H) du n° précédent on exprimerait y en fonction de θ sensiblement avec le même degré d'approximation qu'en fonction de t, sans altérer la forme de (L), sans autre changement que celui de ses constantes.

En effet si dans l'équation

$$\log y = \frac{a't}{b'+t}$$

on remplace t par $\frac{a\theta}{b-\theta}$, il vient

$$\log y = \frac{\frac{aa'}{a-b'}\theta}{\frac{bb'}{a-b'}+\theta}$$

ou

$$\log y = \frac{a''\theta}{b''+\theta},$$

expression de même forme que la proposée, et qui donnera $\log y$ à peu près avec la même approximation, puisque $\frac{a\theta}{b-\theta}$ est une valeur très approchée de t.

Substituant aux lettres a, b, a', b', les nombres convenables, je trouve

$$a'' = \frac{aa'}{a-b'} = 5,356,$$

$$b'' = \frac{bb'}{a-b'} = 347,$$

et par suite

$$\log y = \frac{5,356\theta}{347+\theta} \quad \ldots\ldots \quad (l).$$

Observons maintenant que, si dans la formule (H) on pose $t=33,3$, on en tire $\theta=32,444$; et que, si l'on y fait $t=124,15$, on en déduit $\theta=120,32$. Remarquons en même temps que pour $\theta=32,444$ (l) donne $y=2,8705$, et que pour $\theta=120,32$ (l) donne $y=23,934$. Ces deux résultats qu'on devait prévoir, montrent qu'on aurait pu déterminer les constantes a' et b' de l'équation

$$\log y = \frac{a'\theta}{b'+\theta},$$

à l'aide des deux couples d'observations :

$$\begin{cases} \theta = 32,444 \\ y = 2,8705 \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = 120,32 \\ y = 23,934 \end{cases}$$

sans recourir à la formule (H), et qu'on serait parvenu à la même équation numérique (l). (l) existe donc indépendamment de (H). Mais en déduisant (l) de (L) et de (H), comme je l'ai fait, on est sûr d'avance que (l) doit s'accorder avec les observations à peu près aussi bien que (L), et l'on est dispensé de nouveaux calculs et de tableau comparatif.

Ainsi les deux solutions que je viens d'exposer offrent cette différence, que l'exactitude empirique de la transformée (b) ne peut se prouver qu'*à posteriori*, tandis que celle de la transformée (l) est évidente *à priori*.

La comparaison des formules (l) et (b) est intéressante, surtout lorsqu'on la prolonge hors de l'intervalle des observations. Pour 50 atmosphères, la température assignée à la vapeur d'eau par (l) serait de 261°,207 du thermomètre à air, et elle serait de 260°,954 d'après (b). La différence de ces deux indications n'est que d'un quart de degré. Les équations (l) et (b) continuent donc à s'accorder entre elles jusqu'à une assez grande distance à partir de la limite supérieure des observations; d'où l'on peut *conjecturer* que, si les expériences avaient été poussées plus loin, (l) et (b) reproduiraient assez fidèlement les observations qu'on aurait faites à des températures plus élevées que 220° (1). (l) et (b) *paraissent* admissibles au moins jusqu'à 50 atmosphères.

38. ***Trouver une relation empirique entre les dilatations cubiques du verre au dessus de 100° et les températures correspondantes marquées par le ther-***

(1) Il ne faudrait pas regarder comme une *certitude* cette *probabilité* fondée sur l'accord de deux formules et analogue à d'autres probabilités que tous les esprits saisissent nettement. Ainsi lorsqu'on trouve beaucoup de ressemblance entre deux portraits d'une personne inconnue faits par des peintres différents, on est disposé à croire que chacun de ces portraits ressemble à l'original, mais on n'en a pas la certitude complète. On peut encore citer l'exemple de deux témoins qui, ne s'étant pas concertés, affirmeraient le même fait, ou celui de deux montres prises au hasard qui au même instant indiqueraient la même heure.

momètre à air. On a pour le coefficient moyen de la dilatation cubique du verre

$\frac{1}{38700}$ de 0° à 100°, $\frac{1}{36307}$ de 0° à 200°, et $\frac{1}{32900}$ de 0° à 300°.

Soit y la dilatation de l'unité de volume du verre chauffé depuis 0° jusqu'à t° du thermomètre à air. Soit v ce que cette unité de volume devient à t°. J'essaie les deux formules

$$y=\frac{t}{b-ct}, \qquad \log v=\frac{a't}{b'-t}.$$

En m'appuyant sur le premier et le troisième couples d'observations, j'aurai les systèmes de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{387} \\ t=100 \\ v=\frac{388}{387} \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} y=\frac{3}{329} \\ t=300 \\ v=\frac{332}{329} \end{array}\right\};$$

j'en déduis

$$y=\frac{t}{41600-29t} \quad \ldots\ldots \quad (h),$$

$$\log v=\frac{0{,}015264t}{1461{,}63-t} \quad \ldots\ldots \quad (l).$$

Chacune de ces expressions ne peut être soumise qu'à une seule épreuve, puisqu'on ne possède que trois données numériques dont deux ont servi à l'é-

valuation des constantes. La dilatation du verre de 0° à 200° est

$$\frac{2}{363,07} \quad \text{ou} \quad 0,0055086 \quad \text{d'après l'expérience;}$$

$$\text{elle serait de} \quad 0,0055866 \quad \text{d'après } (h),$$

$$\text{et de} \quad 0,005587 \quad \text{d'après } (l).$$

Les écarts des deux formules sont respectivement

0,0000780 et 0,0000784.

Ces écarts sont à peu près de la même petitesse. Il est donc permis d'adopter l'une ou l'autre formule. On expliquerait aisément leur accord, en réduisant y et v en séries.....

On trouverait qu'une expression de la forme

$$y=at+bt^2,$$

calculée avec les mêmes couples de valeurs que (h) et (l), ne satisfait pas aussi bien à l'observation intermédiaire.

La formule (h) serait applicable à toute expérience où une enveloppe de verre est chauffée au delà de 100° et où l'on doit tenir compte de sa dilatation. Je citerai comme exemple les corrections qu'exige l'emploi de l'appareil imaginé par M. Dumas pour mesurer les densités des vapeurs.

39. *A quelle température* t *du thermomètre à air faudrait-il élever des volumes égaux de verre et de*



platine pris à 0°, pour que leurs dilatations fussent égales ? On connaît les coefficients moyens de la dilatation cubique du verre de 0° *à* 100°, *de* 0° *à* 200° *et de* 0° *à* 300° (n° précédent). *On connaît aussi les coefficients moyens de la dilatation cubique du platine de* 0° *à* 100° *et de* 0° *à* 300°, *savoir* : $\frac{1}{37700}$ *et* $\frac{1}{36300}$.

La température demandée est évidemment comprise entre 100° et 300°, puisque le verre se dilate un peu moins que le platine de 0° à 100° et se dilate plus que lui de 0° à 300°. Cette température ne saurait d'ailleurs être obtenue exactement, faute de données suffisantes. Il ne s'agira donc ici que d'une approximation.

La dilatation y du verre de 0° à t° est liée avec t par la formule (h) du n° 38. Supposons qu'une équation de même forme existe entre t et la dilatation y' du platine. Nous en calculerons les constantes au moyen des deux coefficients connus. Il viendra

$$y' = \frac{t}{38400 - 7t} \quad \ldots \ldots (h'),$$

formule qu'on ne peut vérifier directement, mais qu'on peut admettre par analogie.

Pour que y soit égal à y', il faut qu'on ait

$$\frac{t}{41600 - 29t} = \frac{t}{38400 - 7t},$$

d'où l'on tire $t = 145°,45$, C. Q. F. T.

Remarquons en passant que (h') pourrait servir à corriger les indications du thermomètre à air sec et à réservoir de platine que Dulong et Petit ont proposé pour la détermination des hautes températures.

40. *Exprimer par une formule empirique les variations que la chaleur spécifique du fer éprouve avec la température entre* 100° *et* 350° *du thermomètre à air. Les chaleurs spécifiques moyennes du fer sont, d'après Dulong et Petit*,

0,1098 *de* 0° *à* 100°,	0,1150 *de* 0° *à* 200°,
0,1218 *de* 0° *à* 300°,	0,1255 *de* 0° *à* 350°.

Je prends pour *unité de chaleur* la quantité de chaleur qu'un gramme d'eau distillée perd ou gagne en se refroidissant ou en s'échauffant d'un degré centésimal, quantité qu'on peut regarder comme constante entre 0° et 100°. D'après cette définition, un gramme de fer porté de 0° à 100° gagne $0{,}1098 \times 100$ ou 10,98 unités de chaleur. Soit y le nombre d'unités de chaleur qu'il reçoit quand on le chauffe depuis 0° jusqu'à $100° + \theta°$; je pose

$$y = 10{,}98 + a\theta + b\theta^2,$$

a et b étant deux constantes à déterminer. Or, je sais qu'en passant de 0° à 200° 1g de fer gagne 200 fois les 0,1150 d'une unité de chaleur ou 23 unités. Ainsi pour $\theta = 100$, je dois avoir $y = 23$. Je sais de

plus que 1g de fer en passant de 0° à 350° gagne 350 fois les 0,1255 d'une unité de chaleur ou 43,925 unités. Ainsi, pour $\theta=250$ j'aurai $y=43,925$. a et b seront donc donnés par les deux couples d'observations

$$\begin{cases}\theta=100,\\ y=23,\end{cases}\qquad \begin{cases}\theta=250,\\ y=43,925.\end{cases}$$

J'en déduis l'équation

$$y=10,98+0,11248\theta+0,0000772\theta^2. \quad . \quad . \quad (P).$$

Au moyen des mêmes couples j'obtiens aussi

$$y=10,98+\frac{39599,89\theta}{348750-193\theta}. \quad . \quad . \quad (H).$$

Pour vérifier l'exactitude empirique de chacune de ces formules, je fais $\theta=200$ dans (P); j'en tire $y=36,564$. Je divise 36,564 par 300, afin d'avoir la chaleur spécifique moyenne du fer entre 0° et 300°: le quotient est 0,12188; il n'excède le nombre observé 0,1218 que de 0,00008.

On trouverait pareillement que la chaleur spécifique moyenne du fer entre 0° et 300° serait 0,12172 d'après (H), nombre qui n'est inférieur au nombre observé que de 0,00008.

Les formules (H) et (P) sont donc également admissibles, puisqu'elles s'écartent aussi peu l'une que l'autre de l'observation qui n'a pas contribué à la détermination de leurs constantes. L'un de ces écarts

étant positif et l'autre négatif, la demi-somme $\frac{0,12188+0,12172}{2}$ est rigoureusement égale à la valeur 0,1218 observée entre 0° et 300°.

Entre 0° et 400° la chaleur spécifique moyenne du fer serait 0,12918 d'après (P) et 0,12956 d'après (H). L'analogie rend probable l'exactitude de la demi-somme

$$\frac{0,12918+0,12956}{2} \text{ ou } 0,12937.$$

En adoptant (P) ou (H) on calcule aisément la *perte de chaleur* que 1g de fer éprouve pour un abaissement de température égal à $\theta-\theta'$, dans l'hypothèse où le métal après son refroidissement est encore à θ'° au dessus de 100°. L'équation (P) devenant pour y' et θ'

$$y'=10,98+0,11248\theta'+0,0000772\theta'^2,$$

on aura par soustraction

$$y-y'=0,11248(\theta-\theta')+0,0000772(\theta^2-\theta'^2),$$

ce qui est l'expression de la perte demandée. La *chaleur spécifique moyenne* du fer dans l'intervalle de 100°$+\theta'$° à 100°$+\theta$° serait évidemment

$$\frac{y-y'}{\theta-\theta'}=0,11248+0,0000772\,(\theta+\theta').$$

Si le fer après son refroidissement n'est plus qu'à

t^o au dessus de 0°, t étant plus petit que 100, la *perte de chaleur* qu'il éprouve en passant de $100^o+\theta^o$ à t^o est

$$0,1098(100-t)+0,112480\theta+0,0000772\theta^2\ldots (C).$$

Car, la chaleur spécifique du fer ne subissant pas de variations sensibles entre 0° et 100°, on peut prendre $0,1098(100-t)$ pour la chaleur perdue dans le passage de 100° à t^o. Enfin si l'on divise (C) par $100+\theta-t$, on obtiendra la *chaleur spécifique moyenne* du fer dans l'intervalle de t^o à $100^o+\theta^o$.

Les mêmes *pertes de chaleur* et les mêmes *chaleurs spécifiques moyennes* ne seraient pas plus difficiles à évaluer si l'on partait de la formule (H).

41. ***Evaluer une température comprise entre** 100° **et** 400°, **au moyen de l'immersion d'un anneau de métal dans une masse d'eau froide.***

La méthode pyrométrique que je vais exposer ne diffère de la méthode connue qu'en ce que j'essaierai d'avoir égard aux variations des chaleurs spécifiques des métaux.

Je désigne par $100+x$ la température d'un corps chaud, mesurée en degrés du thermomètre à air, et je suppose qu'un anneau plat de fer dont le poids est m ait eu un contact assez intime avec ce corps pour en partager exactement la température. On plonge cet anneau dans une grande masse d'eau froide dont le poids est p, et dont la température

initiale est t; puis, quand l'équilibre thermométrique est établi, on observe la température t' du mélange. L'équation du problème sera (numéro précédent)

$$m[0{,}1098(100-t')+0{,}11248x+0{,}0000772x^2]=p(t'-t)\ldots(\mathrm{E}),$$

ou bien

$$m\left[0{,}1098(100-t')+\frac{39599{,}89x}{348750-193x}\right]=p(t'-t)\ldots\ldots(\mathrm{E}').$$

On résoudra ces deux équations par rapport à x, et l'on prendra une moyenne arithmétique entre la valeur de x qui satisfait à l'équation (E′) et la racine positive de l'équation (E). Cette moyenne ajoutée à 100° donne approximativement la température demandée.

On pourrait sans peine rendre cette solution plus rigoureuse, en tenant compte de la chaleur enlevée par le vase et par l'eau qui s'évapore. (Voyez plus loin le n° 33 des *Problèmes sur la chaleur*.)

Si la température cherchée surpassait 400°, les équations (E) et (E′) devraient encore être employées simultanément. Mais plus on s'éloignerait de 400°, plus l'incertitude de l'évaluation augmenterait.

Comme le fer chauffé peut s'oxider à la surface soit par le contact de l'air, soit par l'immersion dans l'eau, on aurait peut-être à craindre que cette oxidation ne fût quelquefois une cause sensible d'erreur. Dès lors il faudrait, pour mesurer les hautes températures, recourir à des métaux que l'air, l'eau

et la chaleur ne sauraient altérer : tels sont l'argent et le platine. Mais pour chacun de ces métaux on ne possède que deux couples d'observations, au lieu des quatre dont on dispose pour le fer. Car Dulong et Petit n'ont indiqué les chaleurs spécifiques moyennes de l'argent et du platine que de 0° à 100° et de 0° à 300° (1). On ne peut donc employer que des formules à *deux constantes*, telles que

$$y = aT + bT^2, \qquad y = \frac{aT}{b-T},$$

T étant la température du corps comptée à partir de 0°, et y le nombre d'unités de chaleur qu'il perd en se refroidissant depuis T° jusqu'à 0°. A défaut de vérifications directes, l'analogie offre un moyen de juger de la confiance que méritent ces formules et de la préférence qu'on doit accorder à l'une ou à l'autre. Il suffit pour cela de les appliquer au fer, en partant des observations faites de 0° à 100° et de 0° à 300°. On trouvera que pour le fer 1° ces deux formules le cèdent en exactitude aux formules (H) et (P) du n° précédent, 2° l'hyperbole équilatère ($y = \frac{aT}{b-T}$) convient mieux que la parabole ($y = aT + bT^2$) pour représenter la liaison des pertes de chaleur avec les abaissements de température. Comme il est probable que ces résultats s'étendraient aussi à d'autres métaux, on devra préférer aussi l'hyperbole à la pa-

(1) *Annales de chimie et de physique*, t. VII, p. 148.

rabole pour l'argent et le platine. On obtiendra pour l'argent

$$y = \frac{3403,27T}{63800-27T},$$

et pour le platine

$$y = \frac{118,925T}{3650-T}.$$

Si l'on considère que la chaleur spécifique du platine s'accroît moins rapidement que celle de l'argent avec la température, et qu'en outre le premier métal est beaucoup moins fusible que le second et résiste mieux à la plupart des agents chimiques, on se servira d'un anneau de platine plutôt que d'un anneau d'argent pour former un *pyromètre d'immersion*.

En appelant T la température initiale de l'anneau de platine, et en conservant les autres notations qui précèdent, on déterminera T à l'aide de l'équation du premier degré

$$m\left(\frac{118,925T}{3650-T} - 0,0335\,t'\right) = p(t'-t),$$

équation qui doit d'ailleurs subir les corrections indiquées plus haut pour (E) et pour (E').

42. ***Une petite sphère massive de métal, au centre de laquelle plonge un thermomètre, se refroidit dans un milieu dont la température est constamment égale à 12°,2. On observe les températures de cette***

sphère à différentes époques marquées par une montre à secondes. Trouver une relation empirique entre les excès t *de température et les temps* θ, *à l'aide du tableau suivant, qui a été formé par M. Biot* (1):

Époques des observations.	Températures observées.
0h 49′ 40″	53°
53 50	51
1 1 10″	48
12 0	44
24 30	40
38 20	36
47 0	34
56 30	32

J'essaierai de représenter les excès t de température de la sphère par les ordonnées d'une hyperbole équilatère qui aurait pour abscisses les temps θ. L'équation de cette courbe est ici de la forme

$$t = T - \frac{a\theta}{b+\theta}.$$

(1) M. Biot a fait cette série d'observations dans les Alpes, à l'hospice du Grand Saint-Bernard, avec une sphère de cuivre doré, sous une pression barométrique de 0m,5741. (*Traité de physique*, t. IV, p. 621.)

En partant des trois couples de valeurs

$$\begin{cases} T=40^{\circ},8 \\ \theta=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T-t=13^{\circ} \\ \theta=34',83, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T-t=21^{\circ} \\ \theta=66',83, \end{cases}$$

je trouve

$$t=40,8-\frac{63,600}{135,57+\theta}. \quad . \quad . \quad . \quad (H).$$

M. Biot, s'appuyant sur le premier couple de valeurs et sur le troisième, a exprimé ses observations par la formule newtonienne

$$\log t=\log 40,8-0,00469841\,\theta. \quad . \quad . \quad (N).$$

Je vais comparer ces deux formules avec l'expérience, à l'aide du tableau suivant :

Refroidissement de la sphère de métal dans l'air.

Temps comptés en minutes.	Températures observées.	Températures d'après (H).	Températures d'après (N).
0',00	53°	53°,000	53°,000
4,17	51	51,102	51,201
11,50	48	48,026	48,227
22,33	44	44,096	44,244
34,83	40	40,000	40,191
48,67	36	36,199	36,298
57,33	34	34,098	34,143
66,83	32	32,000	32,000

	de (H)	de (N)
Ecart moyen (1)....	0°,054	0°,163
Écart maximum....	0,199	0,298

Il suit de ce tableau que toutes les observations qui n'ont pas servi à déterminer les constantes des deux formules sont reproduites plus fidèlement par (H) que par (N). Ainsi, quoiqu'on ait opéré entre des limites de température assez favorables à la *loi de Newton*, les progrès du refroidissement de la sphère sont figurés avec plus d'exactitude par l'hyperbole (H) que par la logarithmique (N).

(1) L'*écart moyen* de chaque formule est la somme arithmétique de tous ses écarts divisée par le nombre total des observations.

Note finale.

Les problèmes de ce chapitre sont extraits d'un manuscrit intitulé *Nouveaux essais d'interpolation sur la chaleur*, que j'ai présenté à l'Académie des sciences le 19 septembre 1836. Je vais rapporter ici une partie de la *lettre d'envoi* que j'ai adressée au président de l'Académie, parce que ce passage, faisant ressortir l'utilité des interpolations, servira de complément au chapitre qu'on vient de lire.

« ..... Dans cet ouvrage l'auteur représente la » marche des phénomènes variés qui dépendent de » la température par des formules empiriques, dont » les unes sont nouvelles, et dont les autres ont été » déjà employées, mais à des usages différents ou » sous des formes plus compliquées. Il parcourt suc- » cessivement la plupart des branches de l'étude de » la chaleur, et après une description succincte de » chaque méthode d'expérimentation, il applique le » calcul aux valeurs numériques qui en ont été dé- » duites par les meilleurs physiciens. Souvent il a » essayé d'exprimer les mêmes séries d'observations » par plusieurs formules très dissemblables, et com- » paré ces formules entre elles et avec l'expérience » dans des tableaux de vérification; il a montré » comment elles peuvent servir à donner certains » nombres intéressants qui ne seraient pas directe- » ment *observables*, à construire des tables usuelles, » à corriger les indications de plusieurs instru- » ments, à rendre comparables les observations fai-

» tes sur le même sujet par divers physiciens dans
» des circonstances diverses, à résoudre beaucoup
» de questions avec plus de généralité ou d'exacti-
» tude qu'on ne l'a fait jusqu'ici, enfin à éprouver
» quelques principes admis communément dans la
» théorie analytique de la chaleur.... »

CHAPITRE VIII.

EXEMPLES DE PROBLÈMES DE PHYSIQUE RESOLUS PAR LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

43. *Expliquer pourquoi la densité de l'eau est sensiblement la même à deux températures équidistantes de celle du maximum* ($4°$ *ou* $4°,1$) *dans le voisinage de ce maximum* (*entre* 0° *et* 8°). *Expliquer aussi pourquoi la densité de l'eau décroît très lentement dans le même voisinage.*

Ces deux propriétés sont communes à tous les *maxima* et *minima* d'une fonction continue d'une variable t. En effet si t croît de $+h$ ou de $-h$, la formule de Taylor donne

$$f(t\pm h)-f(t)=\pm\frac{h}{1}f'(t)+\frac{h^2}{1.2}f''(t)\pm\frac{h^3}{1.2.3}f'''(t)+\ldots\ldots(\mathrm{T}).$$

Or, si $f(t)$ est un *maximum* ou un *minimum*, on a $f'(t)=0$, et par conséquent (T) se réduit à

$$f(t\pm h)-f(t)=\frac{h^2}{1.2}f''(t)\pm\frac{h^3}{1.2.3}f'''(t)+\ldots\ldots,$$

et si h est fort petit, h^3 et les puissances supérieures de h pouvant être négligées par rapport à h^2, il reste à peu près

$$f(t \pm h) - f(t) = \frac{h^2}{1.2} f''(t),$$

résultat indépendant du signe de h. Donc dans le voisinage d'un *maximum* ou d'un *minimum*, soit que la variable croisse d'une certaine quantité, soit qu'elle décroisse de la même quantité, la valeur de la fonction éprouve à peu près le même changement.

La formule de Taylor montre aussi pourquoi une fonction varie très lentement de part et d'autre d'un *minimum* ou d'un *maximum*. Car dans l'un et l'autre cas $f'(t)$ étant nulle, la différence $f(t+h)-f(t)$, qui devient égale à

$$\frac{h^2}{1.2} f''(t) \pm \frac{h^3}{1.2.3} f'''(t) + \ldots,$$

dépend principalement de h^2, si h est très petit; tandis que, si $f(t)$ n'est ni un *minimum* ni un *maximum*, $f'(t)$ n'est généralement pas nulle, et l'on a la série complète (T); d'où l'on conclut que le changement de grandeur de la fonction est influencé surtout par la fraction h, et non plus seulement par son carré h^2. Donc alors l'accroissement ou le décroissement de la fonction doit être plus rapide que dans le cas du *minimum* ou du *maximum*.

Il est clair que ces raisonnements s'appliquent à la densité de l'eau pure, puisque cette densité est une fonction continue de la température t, et que

cette fonction est susceptible d'un *maximum*. Quant à l'intervalle de température dans lequel ces résultats se renferment, l'expérience seule peut le faire connaître. On a constaté qu'il est de 8° environ, c'est-à-dire que h doit être égal à 4° au plus, pour que les variations de la densité du liquide obéissent aux deux lois énoncées.

44. *Deux corps A et A', qui ont d'abord la même température, se refroidissent ensemble avec des vitesses inégales dans un milieu dont la température est constante. Au bout de quel temps la différence des températures de ces deux corps sera-t-elle un* maximum?

Concevons que chacun de ces corps ait la même température en tous ses points, et que A et A' soient assez éloignés l'un de l'autre, pour qu'il ne s'exerce entre eux aucune influence calorifique. Puisque les deux corps partent de la même température primitive, qu'ils éprouvent dans le même temps un refroidissement inégal, et qu'ils parviennent enfin à une température commune, qui est celle du milieu environnant, la différence de leurs températures est d'abord nulle, puis elle augmente progressivement pour décroître ensuite, jusqu'à ce qu'elle redevienne égale à zéro. Cette différence doit donc passer par un *maximum* qu'un observateur attentif pourrait saisir, mais dont la valeur et l'époque s'obtiennent plus aisément par le calcul.

Soit T l'excès initial de température des deux

corps. Supposons que l'on connaisse T, et qu'on note les excès de température du corps A au bout de deux temps différents, estimés avec une montre à secondes; ces données serviront à déterminer les coefficients a et b de la formule

$$t = \mathrm{T} - \frac{a\theta}{b+\theta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{H}),$$

où t désigne l'excès de température après un temps θ (voyez le n° 42). Deux couples d'observations semblables faites sur A' conduiront à la formule

$$t' = \mathrm{T} - \frac{a'\theta}{b'+\theta} \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{H'}).$$

Nommons δ la différence $t' - t$ au bout de θ minutes : on a

$$\delta = \frac{a\theta}{b+\theta} - \frac{a'\theta}{b'+\theta}.$$

Pour que δ soit un *maximum*, il faut que sa dérivée $\frac{d\delta}{d\theta}$ soit nulle (1), et partant que l'on ait

$$\frac{ab}{(b+\theta)^2} - \frac{a'b'}{(b'+\theta)^2} = 0.$$

(1) Ici comme aux n°s 34 et 35 on arriverait à la condition de *maximum* par la considération du contact de deux courbes. En posant $\frac{a\theta}{b+\theta} = y$, et en regardant y et θ comme des

On tire de là :

$$\theta = \sqrt{bb'}\,\frac{\sqrt{ab'}-\sqrt{ba'}}{\sqrt{a'b}-\sqrt{ab'}},$$

$$\delta = \frac{(\sqrt{ab'}-\sqrt{ba'})^2}{b'-b}.$$

Cette expression de θ est le temps au bout duquel la différence des températures atteint son *maximum*, et δ est la valeur de ce *maximum*.

Notre solution suppose des données numériques telles, que les formules empiriques (H) et (H') s'étendent aux excès de température dont la différence doit être un *maximum*. En appliquant la dérivée de (H) à plusieurs séries de vitesses de refroidissement observées par Dulong et Petit, nous avons constaté que (H) s'accorde avec l'expérience pour des excès de température compris entre 200° et 20°. Si les excès étaient inférieurs à 20°, il faudrait recourir à la loi de Newton, c'est-à-dire employer les formules

$$t = \mathrm{T}m^{-\theta}, \qquad t' = \mathrm{T}m'^{-\theta}.$$

coordonnées orthogonales, on trouverait que le *maximum* cherché correspond au contact de deux hyperboles équilatères qui ont pour équations

$$y = \frac{a\theta}{b+\theta}, \qquad \text{et } y = \delta + \frac{a'\theta}{b'+\theta}.$$

On obtiendrait

$$\theta = \frac{\log(\text{Log}\, m') - \log(\text{Log}\, m)}{\log m' - \log m},$$

le signe Log indiquant un logarithme népérien, et le signe log un logarithme ordinaire. On aurait la différence *maximum* en remplaçant θ par cette valeur dans l'expression T $(m'^{-\theta} - m^{-\theta})$.

45. ***Déterminer la vitesse de refroidissement dans une enceinte vide.***

Ce problème a déjà été résolu par l'algèbre au n° 24. On conservera les notations de ce numéro, et l'on partira de l'équation transformée

$$\varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) = a^\theta \varphi(t) \quad . \quad . \quad . \quad (\text{A}),$$

dont chaque membre est une expression de la vitesse v de refroidissement. Si l'on prend la dérivée de (A) par rapport à la variable θ, il vient

$$\varphi'(\theta + t) - \varphi'(\theta) = a^\theta \varphi(t) \text{Log}\, a.$$

Soit maintenant $\theta = 0$; il reste

$$\varphi'(t) - \varphi'(0) = \varphi(t) \text{Log}\, a.$$

Si l'on pose $\varphi(t) = y$, et $\varphi'(0) = b$, on aura

$$\frac{dy}{dt} = b + y \text{Log}\, a,$$

ou

$$dt = \frac{dy}{y\,\mathrm{Log}\,a + b};$$

d'où l'on tire par l'intégration

$$y\mathrm{Log}a + b = ca^t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{B}),$$

c désignant une constante arbitraire. Pour déterminer b ou $\varphi'(0)$, on dérivera (B), ce qui donnera

$$\frac{dy}{dt} = ca^t.$$

Si l'on fait $t=0$, le premier membre devient égal à $\varphi'(0)$ ou à b; le second se réduit à c. On a donc $b=c$, et partant l'équation (B) peut s'écrire ainsi :

$$y = \frac{c}{\mathrm{Log}\,a}(a^t - 1),$$

ou, si l'on remplace y par $\varphi(t)$ et $\frac{c}{\mathrm{Log}\,a}$ par m,

$$\varphi(t) = m(a^t - 1),$$

m étant une constante arbitraire. On conclut de là

$$v = ma^0(a^t - 1), \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Remarque. Le calcul infinitésimal servirait également à résoudre les problèmes des n°s 27, 28, 34 et 35. Mais les solutions les plus élémentaires sont celles que nous avons dû préférer.

46. *Dans un appareil de physique destiné à constater les effets de la force centrifuge, une petite boule d'ivoire, percée suivant un de ses diamètres, est traversée par une baguette mince* AB *de fer poli maintenue horizontalement, et peut glisser avec peu de frottement le long de cette baguette. On imprime au système un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe vertical qui passe par le milieu de la baguette, et l'on voit la boule animée de ce mouvement se porter vers une des extrémités de* AB. *On demande quelle est alors la trajectoire du centre de la boule.*

Nous supposerons la boule assez petite pour qu'au même instant toutes ses molécules soient sollicitées par des forces centrifuges à peu près égales. Nous ferons abstraction du frottement et de la résistance de l'air.

Soit pris pour *pôle* (fig. 12) le point O milieu de la baguette, point qui est fixe, puisqu'il est situé sur l'axe de rotation. Soit choisie pour *ligne fixe* l'axe de la baguette dans sa direction initiale AB. Quand elle aura une direction quelconque A'B' formant un angle θ avec AB, soit OM ou r le *rayon vecteur* du centre mobile. r et θ seront les coordonnées polaires de la courbe cherchée. Désignons par T le temps qu'un point quelconque du système emploie à décrire une circonférence entière, temps qui est connu. Le centre de la boule, dans sa position actuelle M, sera animé d'une vitesse MT ou $\frac{2\pi r}{T}$ di-

rigée suivant la tangente au cercle dont OM est le rayon, ou autrement suivant une perpendiculaire au rayon vecteur OM ; en même temps ce centre aura, suivant OM prolongé, une vitesse MF ou $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ due à la force centrifuge. Nommons m la *vitesse angulaire* $\frac{2\pi}{T}$; la résultante des deux vitesses rectangulaires variables mr, m^2r, sera

$$\sqrt{m^2r^2+m^4r^2}=mr\sqrt{1+m^2}.$$

Par conséquent cette vitesse MV est proportionnelle au rayon vecteur. Comme elle est dirigée évidemment suivant la tangente à la trajectoire demandée, l'angle VMF ou α qu'elle fait avec la direction de la force centrifuge MF ne sera autre chose que l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, et l'on sait que cet angle suffit pour déterminer la nature de la courbe. Or on a

$$\text{ang}\,\alpha=\frac{mr}{m^2r}=\frac{1}{m}.$$

Donc *l'angle de la tangente avec le rayon vecteur est constant*, propriété qui caractérise la spirale logarithmique. Cette espèce particulière de spirale est donc la trajectoire du centre mobile.

On obtiendrait pour l'équation polaire de la courbe

$$m\theta=\text{Log}\frac{r}{r_0};$$

r_0 est le rayon vecteur initial OI, et le signe Log indique un logarithme népérien. Le mouvement de rotation étant uniforme, si t est le temps écoulé depuis l'origine de ce mouvement, on a

$$\theta = mt, \qquad \text{d'où } t = \frac{1}{m^2} \operatorname{Log} \frac{r}{r_0}.$$

Ces deux équations feront connaître la position du centre mobile au bout d'un temps quelconque.

47. *Des rayons de lumière simple qui partent d'un point situé sur l'axe d'une surface de révolution viennent frapper cette surface, s'y réfractent, et entrent dans le milieu diaphane qu'elle termine.*

1° *Quelle doit être la nature de la surface pour que tous les rayons réfractés soient parallèles à son axe?*

2° *Quelle doit être la nature de la surface pour que tous les rayons réfractés se croisent au même point de son axe?*

Comme les rayons, après s'être réfractés, ne sortent pas du plan méridien mené par leur direction initiale, il suffira de connaître la nature de la courbe méridienne ou génératrice pour que la surface de révolution soit complétement déterminée.

Prenons pour axe des abscisses l'axe du solide transparent. Supposons le point lumineux situé du côté des x négatives, c'est-à-dire à la gauche de l'origine; les coordonnées rectangulaires du point lu-

mineux seront $-a$ et 0. Soient x et y celles d'un point quelconque d'incidence. Ecrivons $\frac{dy}{dx}=p$; $-\frac{dx}{dy}$ ou $-\frac{1}{p}$ sera, comme on le sait, la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x la normale menée en ce point à la courbe réfringente. Appelons I l'angle d'incidence, R celui de réfraction ; soit

$$\sin I = l \sin R\,;$$

soient enfin x', y', les coordonnées courantes.

$$y'=\frac{y}{x+a}(x'+a)$$

sera l'équation d'un rayon incident ;

$$y'-y=-\frac{1}{p}(x'-x)$$

sera celle de la normale. On en déduira sans peine pour l'équation du rayon réfracté

$$y'-y=\frac{p(x+a+py)-m}{x+a+py+pm}(x'-x),$$

en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{l^2[(x+a)^2+y^2](1+p^2)-(x+a+py)^2}=m.$$

Posons dans cette équation $y'=0$, pour trouver

l'abscisse x' du point où le rayon réfracté rencontre l'axe des x. Cette hypothèse donne

$$x'=\frac{(px-y)(x+a+py)-m(x+py)}{p(x+a+py)-m}.$$

Cherchons d'abord quelle relation doit avoir lieu entre a, l, x, y et p, pour que tous les rayons réfractés soient parallèles entre eux et à l'axe des x. Il faut pour cela que x' soit infinie, et partant que son dénominateur soit nul; nous aurons donc

$$p(x+a+py)-m=0,$$

d'où nous tirerons, après avoir remplacé m et p par leurs valeurs,

$$(x+a)dx+ydy=ldx\sqrt{(x+a)^2+y^2},$$

équation différentielle de la courbe demandée. Pour l'intégrer mettons-la sous la forme

$$\frac{(x+a)dx+ydy}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}=ldx;$$

il viendra, en nommant C une constante arbitraire,

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}=lx+\mathrm{C};$$

telle est l'équation de la courbe en quantités finies. Cette courbe est du second degré; elle a pour foyer

le point lumineux et pour *axe focal* l'axe des abscisses (*voyez l'équation* (α) *du* n° 32). Pour $x=-a$, soit $y=c$; c'est-à-dire appelons c l'ordonnée passant par le foyer, ou le demi-paramètre de la courbe; il en résulte

$$C=la\pm c,$$

et

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}=l(x+a)\pm c,$$

ou

$$y^2-(l^2-1)(x+a)^2\mp 2lc(x+a)-c^2=0\ldots\ldots(A).$$

Cette équation, qu'on pourrait simplifier en faisant $a=0$, caractérise une hyperbole ou une ellipse, suivant qu'on a $l^2>1$ ou $l^2<1$.

1° Considérons le cas de $l^2>1$, ou, en d'autres termes, le passage d'un milieu dans un autre plus réfringent. Soit α le demi-axe transverse de l'hyperbole, et soit β le demi-axe non transverse. On trouve aisément

$$\frac{\beta^2}{\alpha}=c,\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{l^2-1},$$

d'où l'on tire

$$\beta=\frac{c}{\sqrt{l^2-1}},\quad \alpha=\frac{c}{l^2-1},\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\frac{lc}{l^2-1}.$$

On aura donc tous les éléments de la construction de cette courbe, si l'on connaît l'indice l de réfrac-

tion, et si l'on s'est donné le demi-paramètre c ou $\frac{\beta^2}{\alpha}$, qui est entièrement arbitraire. Le rapport des axes $\frac{\beta}{\alpha}$, étant égal à $\sqrt{l^2-1}$, ne varie qu'avec l; d'où il suit que pour les deux mêmes milieux et pour la même espèce de lumière toutes les hyperboles qui résolvent la question sont *semblables*.

Il faut aussi remarquer la proportion

$$2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} : 2\alpha :: l : 1,$$

qui peut s'énoncer ainsi : *la distance des deux foyers est à l'axe transverse comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de réfraction* (1).

Quant au double signe $\mp$ qui affecte un des termes de (A), il répond aux deux positions symétriques que chaque hyperbole peut avoir, l'une à la droite, l'autre à la gauche du point lumineux. Si

(1) Descartes, dans le 8e *discours* de sa *Dioptrique*, a résolu par la synthèse le problème que nous traitons ici par l'analyse. Il s'appuie sur le théorème suivant, qu'il démontre fort simplement par la géométrie :

Si par un point d'une ellipse ou d'une hyperbole on lui mène une normale et un rayon vecteur, les sinus des angles que cette normale fait avec le rayon vecteur et avec le grand axe ou l'axe transverse sont entre eux comme la distance des deux foyers est à cet axe.

Il résulte de ce théorème que, si le rapport de la distance des foyers à l'axe est égale à l'indice de réfraction, le rayon réfracté sera parallèle à l'axe, quand le rayon incident sera un *rayon vecteur*.

l'on suppose les deux sommets réels de la courbe placés à la droite de ce point, on doit prendre le signe inférieur.

Observons maintenant que, si des rayons de lumière partis du foyer gauche d'une de nos hyperboles viennent tomber sur la branche gauche, ils ne pourront se réfracter parallèlement à l'axe transverse : car, la normale en un point quelconque de cette branche coupant l'axe à la gauche du foyer rayonnant, le prolongement du rayon réfracté devra rencontrer l'axe entre ce foyer et le pied de la normale. Concevons donc que la branche gauche soit supprimée, et que les rayons émis par son foyer viennent frapper la convexité de la branche droite; la réfraction les rendra tous parallèles à l'axe transverse.

Réciproquement, si des rayons parcourent d'abord le plus réfringent des deux milieux parallèlement à l'axe transverse de notre hyperbole, et vont frapper la concavité de sa branche droite, ils se croiseront tous, après leur passage dans l'autre milieu, au foyer situé dans la branche gauche.

2° Examinons le cas de $l^2<1$. L'équation (A) pourra s'écrire ainsi

$$y^2+(1-l^2)(x+a)^2\mp 2lc(x+a)-c^2=0,$$

d'où l'on conclut que le lieu des points d'incidence est une des ellipses *semblables* pour lesquelles le rapport des axes $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-l^2}$; le demi-paramètre $\frac{\beta^2}{\alpha}$ de

chacune d'elles est une quantité arbitraire *c*. On déduit successivement de ces valeurs :

$$\alpha = \frac{c}{1-l^2},\quad \beta = \frac{c}{\sqrt{1-l^2}},\quad \sqrt{\alpha^2-\beta^2} = \frac{lc}{1-l^2},$$

$$2\sqrt{\alpha^2-\beta^2} : 2\alpha :: l : 1.$$

Le double signe $\mp$ du terme $2lc(x+a)$ s'expliquerait comme plus haut. On adoptera le signe supérieur, si l'on veut que le centre de la courbe soit à la droite du point lumineux.

Les normales à l'ellipse ont des directions telles, que, de tous les rayons partis de son foyer gauche, ceux que reçoit la portion de courbe qui est à la droite de l'ordonnée passant par ce foyer sont les seuls qui puissent se réfracter parallèlement au grand axe. Il est de plus évident qu'il n'y a que ceux qui tombent sur un des points de la demi-ellipse située à la droite du petit axe qui sortent *réellement* de la courbe dans la direction demandée.

Réciproquement, si des rayons de lumière, marchant d'abord dans le moins réfringent des deux milieux, viennent frapper parallèlement au grand axe la convexité d'une demi-ellipse construite avec les données précédentes, ils se coupent tous, après leur réfraction, au foyer situé dans l'autre moitié de la courbe.

3° Il reste le cas de $l^2=1$ ou de $l=\pm1$, c'est-à-dire le cas où la lumière ne change pas de milieu.

Les angles I et R devenant alors égaux, il faut supposer, pour que l'équation (A) conserve encore quelque sens en optique, que ces angles soient pris de deux côtés différents par rapports à la normale: cela revient à faire $l=-1$. La réfraction se transforme ainsi en réflexion. L'équation (A) se réduisant à

$$y^2 \pm 2c(x+a) - c^2 = 0,$$

on voit que le point lumineux est le foyer d'une parabole qui réfléchit tous les rayons parallèlement à son axe, propriété connue que l'on devait retrouver ici.

Actuellement passons à la recherche de la condition nécessaire pour que les rayons réfractés se rencontrent tous en un même point de l'axe, ou, autrement, déterminons la courbe dont les caustiques par réfraction se réduisent à un seul point, à leur point de rebroussement. Il faut pour cela que la valeur de x' écrite plus haut soit constante; il faut qu'elle soit nulle, si nous prenons pour origine des coordonnées le point de concours des rayons réfractés ou de leurs prolongements. Soit donc $x'=0$, ou

$$(px-y)(x+a+py) - m(x+py) = 0.$$

Cette équation donne

$$(x+a+py)\sqrt{x^2+y^2} = l(x+py)\sqrt{(x+a)^2+y^2},$$

et

$$\frac{(x+a)dx+ydy}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = \frac{l(xdx+ydy)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

d'où l'on tire par l'intégration, en appelant c une constante arbitraire,

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}=l\sqrt{x^2+y^2}+c \quad . \quad . \quad . \quad (B).$$

$\sqrt{(x+a)^2+y^2}$ et $\sqrt{x^2+y^2}$ sont les distances du point d'incidence au point lumineux et au point de concours des rayons réfractés. Nommons ces distances les *longueurs des rayons incident et réfracté*; il en résultera l'énoncé suivant :

Les courbes réfringentes qui réunissent en un seul point les rayons de lumière simple émanés aussi d'un seul point sont telles que la longueur du rayon incident, et celle du rayon réfracté multipliée par l'indice de réfraction, forment une différence ou une somme constante.

Ces courbes, connues sous le nom d'*ovales de Descartes* (1), sont en général du quatrième degré. On peut dire qu'elles ont deux *foyers* d'une nature particulière, et qu'elles sont pour la réfraction ce que les sections coniques sont pour la réflexion.

Soient $\sqrt{(\ +\ +y^2}=r$, et $\sqrt{x^2+y^2}=r'$; il vient

$$r=\pm lr'+c.$$

Cette équation entre r et r' servira à construire ces courbes par points..... Il sera facile d'en découvrir

(1) Voyez le *second livre* de la *Géométrie* de Descartes. Voyez aussi le *Traité de la lumière* d'Huyghens, chap. VI. Ces *ovales* ont été nommées *lignes aplanétiques* par M. Quételet, qui a fait sur ces courbes des recherches intéressantes (*Supplement au Traité de la lumière* de M. Herschel).

la forme et les propriétés par l'emploi des coordonnées rectangulaires ou polaires. En supposant successivement

$$c^2 < a^2,\ c^2 = a^2,\ c^2 > a^2,$$

en même temps que $l >$ ou < 1, on embrassera les cas principaux qui s'offrent à la discussion. Je laisse de côté ces détails purement mathématiques pour m'arrêter seulement sur l'hypothèse de $c = 0$, qui rentre dans le cas de $c^2 < a^2$.

Lorsque $c = 0$; (B) devient

$$(l^2-1)(x^2+y^2)-2ax-a^2=0,$$

ou

$$\left(x-\frac{a}{l^2-1}\right)^2+y^2=\frac{l^2a^2}{(l^2-1)^2} \quad \ldots\ldots \text{(C)}.$$

Soit d'abord $l^2 > 1$; cette équation est celle d'une circonférence de cercle dont le rayon est $\frac{la}{l^2-1}$, et dont le centre est sur l'axe des x positifs à une distance $\frac{a}{l^2-1}$ du *foyer de réfraction* et à une distance du point lumineux marquée par $a+\frac{a}{l^2-1}$ ou par $\frac{l^2a}{l^2-1}$. Il suit de là 1° que le point lumineux est hors de la circonférence, 2° que le *foyer* de réfraction est intérieur au cercle et situé entre le point lumineux et le centre, 3° que le rayon du cercle est moyen proportionnel entre les distances de son centre aux deux *foyers conjugués*.

Si l'on conçoit qu'un rayon émis par le point lumineux tombe sur la convexité du cercle, on verra

sans peine que le rayon réfracté qui lui correspond ou son prolongement ne saurait passer par l'origine. Mais si le même rayon incident, sans dévier, atteint la concavité du cercle et s'y réfracte, le prolongement du rayon réfracté coupera l'axe à l'origine, et ce point sera un *foyer virtuel*. Donc si par le point lumineux on mène deux tangentes au cercle, la plus grande des deux portions de circonférence limitées par les points de contact sera le lieu des points d'incidence qui satisfont à la question. Un calcul très simple montre que la corde commune aux deux arcs se confond avec l'axe des y. Mais pour que l'arc postérieur puisse exercer la propriété réfringente dont il s'agit, l'arc antérieur doit évidemment être supprimé.

Soit maintenant $l<1$. Sans nouveau calcul, il est clair que nos deux foyers conjugués vont échanger leurs rôles. L'origine devenant le point lumineux, parmi les rayons qu'elle émet dans le milieu le plus réfringent, ceux qui frappent l'arc de cercle situé à la droite de l'axe des y ont pour foyer *virtuel* de réfraction le point regardé d'abord comme lumineux.

Enfin soit $l^2=1$, ou $l=-1$; l'équation (C) se réduit à $x=-\frac{a}{2}$, équation d'une droite perpendiculaire sur le milieu de la ligne qui joint le point lumineux et l'origine. Dans ce résultat, qui s'explique par le changement de la réfraction en réflexion, on reconnaît la propriété fondamentale du miroir plan.

La même hypothèse introduite dans l'équation (B) donne

$$r=\mp r'+c,$$

ou

$$y^2 - \frac{a^2-c^2}{c^2}x^2 - \frac{a^2-c^2}{c^2}ax - \left(\frac{a^2-c^2}{2c}\right)^2 = 0.$$

L'équation entre r et r' caractérise une ellipse ou une hyperbole qui a pour foyers les deux points désignés ci-dessus par ce nom. L'équation entre x et y apprend qu'on trouve l'une ou l'autre de ces courbes suivant qu'on a $c^2 > a^2$ ou $c^2 < a^2$, et qu'en outre une parabole répond au cas où $c^2 = a^2$. On voit donc que les trois courbes du second degré sont comprises, comme cas particulier, dans les *ovales de Descartes*, ce qui confirme l'analogie indiquée plus haut.

Maintenant soit proposée cette question :

Des rayons de lumière simple parallèles, ou partis d'un même point, ou tendant vers un même point, se propagent dans un milieu (tel que l'air), et, après avoir traversé un milieu plus réfringent (tel que le verre), repassent dans le premier milieu. Quelles doivent être les surfaces d'incidence et d'émergence du milieu intermédiaire pour que tous les rayons émergents concourent en un même point, ou semblent émaner d'un même point, ou enfin deviennent parallèles? On connaît l'indice de réfraction relatif aux deux milieux et à l'espèce de lumière simple dont il s'agit.

Ce problème est susceptible d'un grand nombre

de solutions, qui peuvent toutes se déduire des résultats de l'analyse précédente. Pour trouver celles qui sont les plus élémentaires, il suffit de combiner deux à deux des surfaces de plans, de sphères, d'hyperboloïdes ou d'ellipsoïdes de révolution. Nous conseillons à nos lecteurs cette recherche, qui est à la fois curieuse et facile; et, pour reconnaître ensuite s'ils sont arrivés aux meilleurs assemblages de surfaces, ils feront bien de comparer leurs solutions à celles que Descartes expose dans le *huitième discours* de sa *Dioptrique*. Malheureusement ces ingénieuses constructions imaginées par Descartes n'ont pas encore été réalisées, parce que les artistes qui taillent le verre ne sont pas encore parvenus à lui donner une courbure exactement elliptique ou hyperbolique (1).

(1) On trouve pourtant dans l'*Encycopédie méthodique* (Mathématiques, *article* Lentilles) la description d'une *machine propre à tailler et à polir les lentilles paraboliques, hyperboliques et elliptiques.* Cette machine a été inventée en Angleterre avant l'année 1785. Il est probable que de nouveaux efforts tentés aujourd'hui sur le même sujet ne seraient pas infructueux.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE Ier.

PROBLEMES DE STATIQUE.

1. Comment pèserait-on dans le vide un corps M de petites dimensions, si l'on avait une balance très sensible qui pût entrer sous le récipient d'une bonne machine pneumatique, et dans laquelle une longue aiguille fixée perpendiculairement au fléau permettrait d'observer les petits angles de ce fléau avec l'horizontale ?

2. Un *poids marqué* p placé sur le bassin A d'une balance fausse fait équilibre à un poids inconnu x placé sur le bassin B. Le même poids p placé sur le bassin B de la même balance fait équilibre à un poids inconnu y placé sur le bassin A. La somme des poids x et y est-elle plus grande ou plus petite que $2p$?

3. On a un segment de paraboloïde de révolution qui est homogène et dont la base a pour centre le

foyer de la surface. On suspend ce segment à un fil mince par un point quelconque du contour de sa base, et, quand l'équilibre est établi, l'on observe que le plan de la base fait avec la verticale un angle de 9° 27′ 44″,36. Conclure de cette observation la position du centre de gravité G de ce segment.

Même question sur le centre de gravité G′ d'un hémisphère homogène, en supposant que pour le même mode de suspension le plan de la base fasse avec la verticale un angle de 20° 33′ 21″,8.

4. Trouver 1° par le calcul, 2° par l'expérience, le centre de gravité G d'une sphère formée de deux segments hétérogènes. On connaît le rayon r de la sphère, la hauteur e de l'un des segments, sa densité d, et la densité d' de l'autre segment. (On peut prendre pour inconnue la distance x du point demandé G au centre C de la sphère).

5. Un hémisphère de plomb est surmonté d'un cylindre droit de liége qui a la même base, et ces deux corps sont liés entre eux invariablement. Où est le centre de gravité G de ce système? Quelle est la condition nécessaire pour que le système soit en équilibre stable, lorsque son axe de figure est vertical et que l'extrémité inférieure de cet axe touche un plan horizontal fixe?

On connaît la hauteur h du cylindre, le rayon r de la base qui lui est commune avec l'hémisphère, et les densités d et d' du plomb et du liége ($d=11,35$, et $d'=0,24$).

6. Aux deux extrémités A et M d'un fil AFM (fig. 13) qui peut glisser autour d'un point fixe F on attache deux poids p et q. L'un d'eux, par exemple q, ne peut se mouvoir que suivant la ligne oblique BM située dans le plan vertical AFM. On demande le lieu M du poids q lorsque les deux poids se font équilibre. On donne la longueur c de la perpendiculaire FB menée du point F sur la droite BM et l'angle α de cette droite avec la verticale.

Examiner le cas où les poids p et q sont égaux.

7. Un fil DACBF (fig. 14) peut glisser autour de deux points fixes A et B. On suspend des poids p et q aux extrémités D et F de ce fil, et un poids r à son milieu C, qui est placé entre les deux points fixes. Connaissant les poids p, q, r, et les positions des points A et B, déterminer le lieu du point C, lorsque le système est en équilibre.

8. Un fil ACDB (fig. 15) est divisé en parties données AC, CD, DB. Ses deux extrémités sont attachées à deux points fixes A et B donnés de position, et deux poids p et q sont suspendus aux points de division C et D. Déterminer le poids p, connaissant le poids q ainsi que les positions des points C et D.

9. Les extrémités A et A′ d'une tige pesante sont attachées à deux points fixes F et F′ par des fils AF, A′F′, dénués de pesanteur (fig. 16). On connaît la longueur a de la droite AA′, les longueurs l et l' des fils AF et A′F′, la distance r des points F et F′, et

l'angle θ de la droite FF' avec l'horizontale FH. Quelle est la condition nécessaire pour que la tige AA' suspendue à ces fils se tienne horizontalement?

10. Soit un rectangle pesant ABCD (fig. 17). Après en avoir enlevé le triangle BCM, on suspend le trapèze qui reste à un fil MS fixé par en haut. Quelle doit être la distance x des points M et A, pour que, le fil étant attaché au point M, la base CD demeure horizontale? la longueur b de cette base est donnée.

11. Deux sphères dont chacune est homogène, dont les rayons sont r et r', et dont les poids sont p et p', se touchent, et s'appuient respectivement sur deux plans inclinés AB, AB' (fig. 18), qui forment avec l'horizon des angles aigus θ et θ'. Quelles doivent être les positions des centres C et C' des deux sphères pour qu'elles soient en équilibre entre ces plans inclinés?

12. On a un vase hémisphérique à parois minces et polies (fig. 19), par exemple un bol d'argent ou de porcelaine. Ce vase est fixé de manière que le grand cercle qui forme les bords de l'ouverture soit horizontal. Une tige pesante AB, homogène et polie, inclinée à l'horizon, touche par son extrémité inférieure A la paroi intérieure du vase, et s'appuie en un point M de sa longueur sur le bord du même vase. Quand cette tige est en équilibre, quelle est la longueur $2x$ de la partie AM intérieure au vase,

ou quel est l'angle v de la tige avec la verticale? On connaît la longueur totale $2l$ de la tige et le rayon r de la sphère à laquelle le vase appartient.

On examinera le cas où $l=\frac{40}{49}r$.

13. Un cylindre droit homogène à base elliptique E peut tourner autour de son axe, qu'on suppose fixe. Une force P est appliquée à l'extrémité A du grand axe de l'ellipse E suivant la tangente à cette courbe. Quelle est la force R qu'il faut appliquer en un point donné M de la même courbe suivant la tangente, pour que R fasse équilibre à P?

On connaît l'*excentricité* ε, c'est-à-dire le rapport de la distance des deux foyers au grand axe, et l'angle θ du grand axe avec la normale menée par le point M.

14. Un homme placé en un point H (fig. 20) veut abattre une tige verticale AB (par exemple un arbre), dont l'extrémité inférieure B est fixe. A quel point M de la tige faut-il que cet homme attache une corde HM pour avoir à faire le moindre effort possible? On connaît la distance HC ou a du point H à la droite AB, la hauteur CB ou c du point H au dessus du point B, et enfin la force p qu'on devrait appliquer suivant l'horizontale CH pour abattre la tige (1).

(1) Les énoncés des problèmes 2, 9, 10, 12 et 14 m'ont été communiqués par M. Lévy, professeur de mathématiques au collége de Charlemagne.

15. Un point matériel A (fig. 21), dont on connaît la position sur une droite donnée AB, et qui ne peut se mouvoir que sur cette droite, est attiré vers un centre situé sur une autre droite donnée CD, parallèle à la première. En quel point M de CD ce centre doit-il être placé pour que la composante de la force attractive, dirigée suivant AB, soit la plus grande possible ? On suppose que l'attraction s'exerce entre les deux points en raison inverse de la puissance entière m de la distance qui les sépare.

CHAPITRE II.

PROBLEMES DE DYNAMIQUE.

1. Un observateur placé à l'ouverture d'un puits a laissé tomber une pierre au fond, et a compté sur sa montre n secondes depuis le commencement de la chute jusqu'à l'instant où il a été averti de l'arrivée de la pierre par le bruit qu'elle a fait en bas. Comment peut-il déterminer par approximation la profondeur x du puits, en partant des lois de la chute des corps graves et de ce fait que le son parcourt dans l'air m mètres par seconde? ($m=340$ environ).

2. Deux petites boules A et A′, d'abord en repos, sont distantes d'une quantité m et placées sur la même verticale. On les abandonne successivement à l'action de la pesanteur. La boule A, qui est la plus élevée, est déjà tombée d'une hauteur h lorsque A′ commence à tomber. On demande les lieux α et α' où les deux boules se trouveront lorsque l'intervalle qui les sépare sera égal à d.

Exemple numérique : $m=135^{pi}$, $h=15^{pi}$, $d=30^{pi}$.

3. Un point A et une droite indéfinie BC étant donnés dans un plan vertical, trouver la droite qu'un corps grave doit suivre pour arriver du point A à la droite BC dans le temps le plus court possible en passant par un plan incliné.

4. Dans l'expérience connue de l'ascension apparente d'un double cône homogène sur un plan incliné, quel est le mouvement réel du centre G de gravité du double cône? Quelle est la ligne que décrit ce point G? Quelle est aussi la condition nécessaire pour que le corps paraisse remonter le plan?

On sait que ce plan incliné est formé par deux règles métalliques réunies à charnière, qui s'élèvent au dessus de l'horizon à mesure qu'elles s'écartent l'une de l'autre. On donne l'angle 2φ de ces règles, l'angle θ que fait avec l'horizon la bissectrice de l'angle 2φ, le rayon r de la base commune aux deux cônes et la hauteur a de chacun d'eux.

5. D'un point A élevé d'une hauteur h au dessus de l'horizon partent en même temps deux corps graves, l'un qu'on abandonne à l'action seule de la pesanteur, l'autre auquel on imprime une vitesse initiale de n pieds par seconde et qu'on assujettit à graviter le long d'un plan incliné dont A est le sommet. Quelle doit être la longueur l de ce plan pour que les deux corps arrivent en même temps à terre?

Exemple : $h=240^{\text{pi}}$, $n=90^{\text{pi}}$, $g=30^{\text{pi}}$, g désignant la vitesse acquise par un corps grave au bout de $1''$ de chute libre.

6. Deux plans inclinés qui ont des longueurs l et l' sont adossés l'un à l'autre de manière qu'ils aient le même sommet A. h est leur hauteur commune. Deux corps graves M et M' sont lancés en même temps des points les plus bas de ces plans avec des vitesses initiales v et v' dirigées suivant leurs longueurs. Quelle est la relation qui doit lier v et v' pour que ces deux corps arrivent en même temps au sommet A ?

Exemple : $l = 400^{pi}$, $l' = 300^{pi}$, $h = 240^{pi}$, $v = 150^{pi}$, $g = 30^{pi}$ (g est la même notation qu'au numéro précédent).

7. Un pendule simple étant arrivé à un point quelconque de l'arc qu'il décrit, quelle est la tension totale que le fil éprouve ? Dans quelle position du pendule cette tension est-elle un maximum ?

8. Quel est le rapport de la durée d'une demi-oscillation du pendule simple au temps qu'il emploierait à graviter le long de la corde de l'arc qu'il a décrit ? Conclure du rapport qu'on aura trouvé qu'un petit arc est parcouru dans un temps plus court que sa corde.

9. Lorsqu'un homme se tient debout sur un cheval qui décrit rapidement une circonférence de cercle, il pose ses pieds sur la partie du dos du cheval la plus voisine du centre du manége, et penche son corps du côté de ce centre. Démontrer que cette position est la seule qui puisse assurer l'équilibre du cavalier.

10. Une petite balle de plomb est dans un tube dont l'axe fait avec l'horizon un angle ω, et qui tourne uniformément autour d'une verticale passant par l'extrémité inférieure A du tube. Quelle doit être la durée t d'une révolution entière du système pour que la balle posée en un point donné M de l'axe du tube y demeure en équilibre? On connaît la hauteur h du point M au dessus de l'horizontale menée par A.

11. Une très petite boule pesante est dans un vase dont la surface intérieure est celle d'un ellipsoïde de révolution. Ce vase tourne uniformément autour de son axe de figure, qui est supposé vertical et dont la longueur est $2a$. On connaît l'autre axe $2b$ de l'ellipse génératrice, ainsi que le temps t d'une révolution entière du vase. En quel point M de la surface tournante faut-il poser la boule pour qu'elle y demeure en équilibre?

On prendra pour inconnue la hauteur x du centre de l'ellipsoïde au dessus du parallèle que la boule doit décrire. On calculera aussi la pression p que la boule exerce au point M sur la surface qui la soutient.

12. On suppose que la Terre et Jupiter soient des sphères dont chacune est homogène et dont les volumes sont entre eux comme 1 est à 1470,2; que leurs masses soient entre elles comme 1 est à 331,56; et que chacune de ces planètes tourne uniformément autour de son axe, la première en $0^j,997$ et la se-

conde en $0^s,414$. On connaît la valeur absolue du rayon terrestre r ($r = 6366745^m$).

1° Sachant que l'espace moyen parcouru par les corps graves à la surface de la Terre pendant la première seconde de leur chute est de $4^m,90$, on demande l'espace correspondant x parcouru à la surface de Jupiter (abstraction faite des mouvements de rotation des deux planètes).

2° Sachant que sur la Terre la longueur moyenne du pendule à secondes est de $0^m,994$, on demande la longueur y du même pendule à la surface de Jupiter. (Ici l'on néglige encore les mouvements de rotation.)

3° Sachant que la force centrifuge à l'équateur terrestre est de $0^m,0339$, on demande la force centrifuge z à l'équateur de Jupiter.

4° Sachant que la densité de la Terre est 5,5, la densité de l'eau étant prise pour unité, on demande la densité δ de Jupiter.

5° et 6° On demande enfin les poids u et v de la Terre et de Jupiter exprimés en kilogrammes.

13. Déterminer l'influence de la rotation diurne de la terre sur l'intensité et la direction de la pesanteur en un point quelconque de la surface de cette planète.

On suppose que la terre soit une sphère homogène. On connaît l'intensité g que la pesanteur aurait sur tous les points de la surface du globe si le globe ne tournait pas autour de son axe. On sait aussi qu'à l'équateur la force centrifuge est $\frac{1}{289}$ de la pesanteur

réelle g. On prendra pour inconnues l'intensité g' de la pesanteur apparente à une latitude l, et l'angle e du fil à plomb avec le rayon terrestre à la même latitude.

Appliquer les formules trouvées au cas où $l=48°$ $50' 14''$. (Cette latitude est celle de Paris.)

14. Quel serait le rapport x de la force centrifuge à la pesanteur, à la limite de l'atmosphère, sur une verticale menée par un point de l'équateur? On suppose qu'à la surface de la terre, sur la même verticale, la force centrifuge soit $\frac{1}{289}$ de la pesanteur, et que la hauteur de l'atmosphère soit 0,01 du rayon terrestre.

15. Des points A et A' (fig. 22) situés sur la même droite horizontale on lance au même instant deux points pesants M et M', suivant les droites AT, A'T', dirigées dans le même plan vertical. Au bout de quel temps t la distance d des points M et M' sera-t-elle un *minimum?* Quelle est la condition nécessaire pour que les deux mobiles viennent à se rencontrer? En quel point C aurait lieu cette rencontre?

On connaît la distance AA' ou c des deux points de départ, les vitesses initiales a et a', les angles de projection TAA' ou θ et T'A'A ou θ', et enfin l'intensité g de la pesanteur. On néglige la résistance de l'air.

16. Un vase cylindrique dont l'axe est vertical contient un liquide qui s'en écoule par deux petits

orifices latéraux A et A' percés en mince paroi suivant la même arête. Pendant que ce double écoulement a lieu, on maintient dans le vase un niveau constant, dont la hauteur est h au dessus de l'orifice A et h' au dessus de l'orifice A'. Où est le point de rencontre des jets curvilignes qui sortent par les deux orifices (1)?

17. On a une série de billes homogènes, parfaitement élastiques, dont les masses sont en progression par quotient. Ces billes sont en contact sur un plan horizontal, et leurs centres sont en ligne droite. On fait d'abord choquer la dernière bille par la première avec une vitesse donnée; puis on produit le même effet en faisant passer le mouvement à travers toutes les billes de la série. On demande le rapport qui existe entre les vitesses que la dernière bille reçoit de la première par le choc immédiat et par le choc médiat.

18. Une bille parfaitement élastique, dont la vitesse et la direction sont connues, venant à choquer obliquement une autre bille de même nature, de masse double et en repos, quelles seront, après le

(1) Ce problème et deux ou trois autres du chapitre qui suit appartiennent à l'*hydrodynamique*. Il m'a fallu recourir à ces *enclavements*, parce que le petit nombre de problèmes élémentaires que peut fournir l'hydrodynamique ne m'a pas permis de consacrer à cette partie un chapitre spécial.

choc, les directions et les vitesses respectives des deux billes? On suppose que ces deux corps puissent se mouvoir sans frottement sur un plan horizontal indéfini.

19. Une bille homogène, posée sur un plan horizontal, a reçu une impulsion d'une force instantanée dirigée horizontalement vers le centre de cette bille. Pourquoi la bille *roule-t-elle* sur le plan, au lieu de *glisser?* Quel est le sens de la rotation qui accompagne la translation? La vitesse de rotation dépend-elle du diamètre de la bille?

CHAPITRE III.

PROBLÈMES D'HYDROSTATIQUE (1).

1. Un vase en partie plein d'eau est posé sur le bassin A d'une balance et maintenu en équilibre par des poids placés sur l'autre bassin B. Si l'on vient à plonger dans cette eau un corps solide que la main soutient à l'aide d'un fil, l'équilibre sera troublé. Comment pourra-t-on le rétablir de manière à rendre sensible aux yeux une conséquence du *principe d'Archimède?*

2. Quel est le rapport des poids x et y de plomb et de liége qu'il faudrait attacher ensemble pour que ce système pût se maintenir en équilibre au milieu d'une masse d'eau ? On connaît les densités a, b, c du plomb, du liége et de l'eau. ($a=11,35$; $b=0,24$; $c=1$.)

(1) Le mot *hydrostatique* est employé ici dans son acception la plus étendue, c'est-à-dire que nous appelons *hydrostatique* la science de l'équilibre des liquides et des gaz.

3. Une boule de cire et une boule de platine, posées dans les bassins d'une balance, se font équilibre dans l'air. Connaissant les densités a, b, c du platine, de la cire et de l'air, trouver le rapport des poids réels des deux boules. ($a=22$; $b=0,96$; $c=0,0013$.)

4. Une boule de plomb et une boule d'ivoire de même poids absolu, étant plongées dans l'eau, la première en totalité et la seconde en partie, se font équilibre l'une à l'autre sous les bassins d'une balance auxquels elles sont suspendues par des fils très déliés. Dans cette hypothèse on demande quel est pour la boule d'ivoire le rapport z de la portion de volume immergée au volume total.

La densité du plomb est a, celle de l'ivoire est b, celle de l'eau est c, et d est celle de l'air qui environne la partie supérieure de la boule d'ivoire. ($a=11,35$; $b=1,92$; $c=1$; $d=0,0013$.)

5. Dans un vase qui contient de l'eau sur du mercure on a une boule de fer en équilibre, une partie de ce corps étant plongée dans le mercure et le reste dans l'eau. Quel est pour la boule de fer le rapport de la portion x de volume plongée dans l'eau à la portion y plongée dans le mercure? Les densités du mercure, du fer et de l'eau, sont a, b, c. ($a=13,6$; $b=7,8$; $c=1$.)

6. Pour déterminer la densité d'un corps A plus léger que l'eau, on cherche d'abord son poids p dans

l'air, puis on l'attache à l'extrémité d'un fil délié qui passe autour d'une poulie verticale fixée au fond d'un vase rempli d'eau. L'autre extrémité du fil étant attachée à l'un des plateaux d'une balance, on met dans l'autre plateau un poids p' suffisant pour que le corps A soit entièrement plongé dans l'eau et que le fléau soit horizontal. Quelle sera la densité x du corps A rapportée à celle de l'eau?

(Si le corps A est du liége verni et que $p=30^{gr}$, on trouve $p'=95^{gr}$.)

7. Un morceau de liége verni pèse p^{g} dans l'air. Une boule de plomb pèse p'^{g} dans l'eau. Le liége et le plomb liés ensemble, suspendus par un fil à l'un des plateaux d'une balance et plongés entièrement dans l'eau, n'y pèsent plus que p''^{g}. On demande le rapport x de la densité du liége à celle de l'eau. (On pourra supposer $p=30$, $p'=110$ et $p''=15$.)

8. Un corps A soluble dans l'eau et dont les pores sont perméables aux liquides pèse p dans l'air, et p' est son poids apparent dans un liquide B où il est insoluble. Après avoir retiré A de B, on trouve que A pèse p'' dans l'air. On sait de plus que la densité de B est à celle de l'eau comme d est à 1. Conclure de ces données la densité x du corps A rapportée à celle de l'eau.

9. Comment pourrait-on évaluer le rapport des densités de deux liquides quelconques, si l'on n'avait à sa disposition que ces deux liquides et un

large tube recourbé à quatre branches parallèles et graduées?

10. Quelle est la densité x d'un liquide dans lequel l'aréomètre de Beaumé à échelle descendante s'affleure au $n^{ème}$ degré?

N. B. Pour graduer cet aréomètre, Beaumé le faisait flotter successivement dans de l'eau pure à 10° (R) et dans un composé de 17 onces d'eau et de 3 de sel marin desséché. A 10° la densité $1+\alpha$ de ce composé est 1,1136, celle de l'eau étant prise pour unité. Beaumé marquait 0 et 15 aux points d'affleurement dans l'eau pure et dans cette eau salée, il divisait en 15 parties égales la distance comprise entre ces deux points, et prolongeait l'échelle jusqu'au bas de la tige, supposée cylindrique.

11. Quelle est la densité y d'un liquide dans lequel l'aréomètre de Beaumé à échelle ascendante s'affleure au $n^{ème}$ degré?

N. B. Pour graduer cet aréomètre, Beaumé le faisait flotter successivement dans un composé de 9 onces d'eau et de 1 de sel marin desséché, et dans l'eau pure. A 10° (R) la densité $1+\beta$ de ce composé est 1,0855, celle de l'eau étant prise pour unité. Beaumé marquait 0 et 10 aux points d'affleurement dans cette eau salée et dans l'eau pure, il divisait en 10 parties égales la distance comprise entre ces deux points, et prolongeait l'échelle jusqu'au haut de la tige.

12. Un flacon plein d'air sec soumis à la pression h de l'atmosphère pèse p^g; ce flacon rempli de chlore sec sous la pression h' pèse p'^g; enfin le même flacon plein d'eau distillée pèse p''^g. On suppose que la densité de l'eau soit égale à m fois celle de l'air sec sous la pression moyenne H. Cela posé, on demande quel est le rapport de la densité du chlore à celle de l'air sous une pression commune.

N. B. La température est censée ne pas varier dans les trois observations successives.

Exemple numérique relatif à la température de la glace fondante ; $p=740$; $p'=742,37$; $p''=2020$; $m=769$; $h=h'=H=76^{cm}$.

13. Quelle est la condition algébrique qui doit être remplie pour qu'une pompe aspirante commence à donner de l'eau dès la seconde levée du piston ?

l est la hauteur du corps de pompe, m est sa base; h est la hauteur du tuyau d'aspiration, n est sa base; l' est la course du piston ; H ou $10^m,33$ est la colonne d'eau qui fait équilibre à la pression atmosphérique.

14. Un tube cylindrique de verre, bouché par en haut et percé par en bas, contient de l'air dans sa partie supérieure et de l'eau dans sa partie inférieure; l'air et l'eau y sont logés dans un rapport tel que le tube est presque aussi pesant qu'un égal volume d'eau, et forme un *ludion* dont le point culminant dépasse à peine le niveau de l'eau dans une

éprouvette. L'axe du tube flottant est vertical, et n est la hauteur du volume d'air qu'il renferme, p étant la pression que l'atmosphère exerce sur la surface du liquide. Si par un choc on force le ludion de descendre, il ne s'arrêtera qu'au fond du vase et il y restera. On demande quelle est alors la hauteur x de l'air dans le tube; h désignant la hauteur actuelle du niveau au dessus du sommet de ce tube.

Si l'on vient ensuite à diminuer pendant quelques instants la pression extérieure p d'une quantité p', quelle doit être au moins cette diminution momentanée p' pour que le ludion remonte vers le niveau du liquide et y reprenne sa position primitive?

15. On place sous le récipient d'une machine pneumatique deux éprouvettes à pied qui contiennent de l'eau. Ce liquide s'élève dans les deux vases à des hauteurs inégales, et la communication est établie entre eux par un siphon dont chaque extrémité, échancrée latéralement, s'appuie sur le fond de l'un de ces vases. On suppose que le niveau du liquide dans chaque branche soit d'abord le même que dans le vase où elle est plongée. Cela posé, on fait le vide sous le récipient, puis on y laisse rentrer l'air. Que se passera-t-il successivement dans le siphon et dans les éprouvettes?

16. On a un siphon, qui se trouve amorcé, quoique la partie supérieure de sa branche descendante renferme de l'air. La partie inférieure de cette branche est terminée par une ouverture étroite O, et elle

contient une colonne liquide qui s'allonge de plus en plus, mais d'une petite quantité, pendant la durée de l'écoulement. Cette colonne est alimentée par une couche d'eau qui vient sans cesse du vase, et qui se glisse le long des parois à côté de l'air intérieur. Expliquer le jeu de ce siphon, et l'équilibre qui aura lieu quand l'écoulement s'arrêtera.

17. On a un tube cylindrique ABCD (fig. 32) ouvert par les deux bouts, deux fois recourbé, dont les parties extrêmes AB, CD, sont verticales et inégales, et dont la partie intermédiaire BC est horizontale. Les extrémités A et D plongent de quelques millimètres dans des masses d'eau que renferment deux vases M et N et dont les niveaux sont à des hauteurs différentes. On suppose que la branche CD soit d'abord pleine d'eau et le reste du siphon plein d'air, et l'on demande la relation qui doit exister entre les longueurs des parties AB, BC et CD du siphon, pour que le liquide renfermé dans CD, en s'écoulant librement dans le vase N, amorce le siphon et par suite fasse écouler le liquide du vase M dans le vase N.

Examiner aussi le cas où les trois branches AB, BC, CD, ont des diamètres différents.

18. Soit un vase cylindrique d'une hauteur h, fermé par ses deux extrémités et rempli d'eau jusqu'à la hauteur $h-r$. L'espace compris entre le niveau du liquide et la base supérieure est occupé par de l'air dont la force élastique p est d'abord la même que celle de l'air extérieur. La branche la plus courte

d'un siphon plein d'eau est plongée dans le vase jusqu'au fond, et la plus longue s'abaisse au dessous de ce fond d'une hauteur *d*. L'eau commençant à s'écouler par le siphon lorsque sa hauteur est $h-r$, on demande quelle sera la distance x du haut du vase au niveau du liquide lorsque l'écoulement s'arrêtera.

Premier exemple : $p=32^{pi}$; $h=4^{pi}$; $r=1^{pi},75$; $d=2^{pi}$.

Second exemple : $p=32^{pi}$; $r=\frac{3}{4}h$; $d=\frac{p}{4}=8^{pi}$.

Indiquer aussi la condition générale qui doit être remplie pour que le vase se vide complétement (1).

19. On a un flacon plein d'eau, fermé par en haut et percé latéralement de deux petits orifices M et N, qui sont d'abord fermés. Que se passera-t-il, 1° si l'on débouche dans l'air M ou N, 2° si l'on débouche dans l'air M et N à la fois?

20. Pendant qu'un liquide s'écoule uniformément d'un *flacon de Mariotte*, on débouche tout à coup un petit orifice latéral compris entre le niveau du

(1) Voici encore un problème fort simple auquel le siphon donne lieu :

Un siphon est-il toujours amorcé lorsqu'il a été rempli d'avance d'un liquide moins dense que celui qu'il s'agit de transvaser ? Si la réponse est négative, quelle est alors la condition d'*amorcement?*

On trouvera d'autres questions sur le même sujet dans une *Notice sur le siphon* publiée par M. Collardeau.

liquide dans le vase et le plan horizontal qui limite inférieurement le tube à air. Que se passe-t-il alors? La nature ou la vitesse de l'écoulement se trouve-t-elle modifiée? Où se fixe le niveau du liquide dans le tube?

21. Tandis que de l'eau s'écoule par un petit orifice d'une cuve ouverte par en haut, mais dont on ne peut voir l'intérieur, on voudrait calculer l'abaissement progressif de niveau dans la cuve par l'inspection d'un tube à trois branches parallèles (tel que celui de la fig. 5). Ce tube est cylindrique et ouvert par les deux bouts; ses trois branches A, B, C, sont verticales; l'une des branches extrêmes, savoir A, plonge dans l'eau de la cuve, et les deux autres, B et C, extérieures à la cuve, forment un siphon manométrique en partie rempli d'eau; la branche extrême C est graduée.

Avant l'écoulement la colonne d'eau est plus haute de n^{cm} en C qu'en B· l^{cm} est la hauteur de la portion du tube B qui s'élève au dessus du niveau de l'eau en B. h^{cm} est la hauteur du sommet du tube A au dessus du niveau dans la cuve.

Au moment de l'observation la différence de niveau entre C et B est réduite à r^{cm}; x^{cm} est la distance inconnue du niveau primitif dans la cuve au niveau actuel.

La colonne d'eau qui mesure la pression atmosphérique est égale à p^{cm}. (On sait que 1033 est à peu près la valeur moyenne de p.)

22. Si la densité de l'air atmosphérique était constante jusqu'à une petite hauteur, de combien de mètres faudrait-il s'élever au dessus du niveau de la mer pour que la colonne barométrique diminuât d'un millimètre?

On admet que la densité de l'air est à celle du mercure comme $\frac{1}{770}$ est à 13,6.

23. On a un baromètre à siphon dont la chambre contient de l'air sec raréfié, et où la différence de niveau du mercure dans les deux branches est h. Après avoir enlevé du mercure de la branche ouverte, de manière à augmenter la capacité de la chambre dans le rapport connu de m à 1, on observe que la différence de niveau est devenue h'. Comment peut-on, d'après ces données, mesurer la pression p de l'atmosphère?

Exemple : $m=2$, $h=459^{mm}$, $h'=607^{mm}$.

24. On a un baromètre à siphon exactement calibré, gradué en pouces et à branches verticales. La branche fermée est d'une hauteur h, cette hauteur étant comptée à partir du plan horizontal qui, sous la pression p de l'atmosphère, répond au niveau du mercure dans la branche ouverte. On fait passer dans la chambre barométrique une quantité de gaz sec qui sous la pression actuelle p' de l'atmosphère occuperait n divisions du tube. Quelle sera la différence x de niveau du mercure dans les deux bran-

ches, quand la dépression de ce liquide aura donné lieu à un nouvel équilibre?

Premier exemple : $p'=p=28$; $h=32,5$; $n=2$.

Second exemple : $p'=p=28$; $h=30$; $n=24,375$.

25. On a un tube cylindrique étroit, gradué, fermé par le bas, ouvert par le haut, et d'une hauteur h. Au fond de ce tube est une colonne d'air sec qui, sous la pression p de l'atmosphère, occuperait n divisions du tube, et au dessus de cet air est une colonne de mercure qui remplit le reste du tube. Ce tube étant porté et maintenu verticalement sous un récipient où l'on fait le vide, l'air intérieur se dilate et chasse une portion du mercure qui pesait sur lui. On demande le nombre x de divisions qu'occupera cet air raréfié, quand on aura obtenu un vide parfait.

Exemple : $p=28^{po}$; $n=0^{po},5$; $h=15^{po}$.

26. Un tube cylindrique, fermé par le haut et contenant de l'air sec dans sa partie supérieure, est maintenu verticalement sur une large cuve pleine de mercure. La hauteur du sommet du tube au dessus du niveau du liquide est de 35 centimètres. Le mercure s'élève dans ce tube plus haut (ou plus bas) que dans la cuve de 19^{cm}. Quel est le nombre x (ou y) de centimètres dont il faut enfoncer (ou soulever) ce tube pour que le niveau du liquide y devienne le même que dans la cuve?

N. B. Au moment de l'expérience la colonne barométrique est de 76^{cm}.

27. Un tube cylindrique fermé par le haut, gradué en centimètres et rempli en partie d'air sec, est maintenu verticalement sur une cuve pleine de mercure dans lequel plonge son extrémité ouverte, et le niveau du liquide est le même dans le tube que dans le réservoir. Si l'on vient à soulever le tube d'une hauteur a au dessus du niveau primitif, qui est supposé constant dans la cuve, à quelle hauteur x le mercure montera-t-il dans le tube? On connaît la hauteur initiale h du sommet du tube et la pression p de l'atmosphère.

Exemple : $a = 24^{cm}$; $h = 15^{cm}$; $p = 76^{cm}$.

Modifier la solution dans le cas où en soulevant le tube on ferait varier sensiblement le niveau du mercure de la cuve.

28. Un réservoir cylindrique fermé, dont le fond communique avec un tube vertical ouvert par le haut, contient de l'air sec dans sa partie supérieure. La partie inférieure de l'appareil renferme du mercure, dont la hauteur est d'abord la même dans le réservoir et dans le tube latéral. Si l'on injecte de l'air sec dans le réservoir avec une pompe foulante, et que l'excès de la hauteur du mercure dans le tube sur sa hauteur dans le réservoir devienne égal à n fois la colonne barométrique p, quel sera le rapport x de la masse d'air introduite dans le vase à la masse primitive?

On connaît la base b du cylindre, la base c du tube, et la hauteur initiale a de la colonne d'air dans le réservoir.

29. La petite éprouvette (*siphon manométrique*) d'une machine de compression étant exactement calibrée et graduée en pouces, on suppose qu'avant la condensation de l'air le mercure soit de niveau dans les deux branches, que l'air de la branche fermée y occupe n pouces, et que p soit la hauteur du baromètre. Après qu'on a fait jouer les pistons, quelle doit être la différence h entre les hauteurs des deux colonnes de mercure dans le siphon, pour que la masse de l'air condensé sous le récipient soit devenue égale à m fois sa masse primitive?

Exemple : $n=4^{po}$; $p=28^{po}$; $m=8,25$.

30. On a une machine pneumatique et une machine de compression dont les récipients ont des capacités a et a', et dont les corps de pompe ont des capacités b et b'. On suppose que les deux récipients puissent communiquer entre eux par un tube très étroit muni d'un robinet. Le robinet étant fermé, et l'air ayant d'abord dans chacun des deux récipients une élasticité p égale à la pression de l'atmosphère, on raréfie l'air dans l'un par n coups de piston, et on le condense dans l'autre par n' coups; puis on établit la communication entre les deux récipients. Quelle sera l'élasticité x de l'air dans le système des deux cloches, quand l'équilibre y sera rétabli?

Examiner en particulier la condition nécessaire pour qu'on ait $x=p$.

31. Soit une machine pneumatique dont le récipient ait une capacité a et dont les deux corps de pompe aient des capacités différentes b et b'. Suivant

quelle loi décroîtrait la quantité d'air du récipient si le nombre des coups de piston augmentait en progression arithmétique?

Quelle est aussi la loi suivant laquelle l'air serait condensé par une machine de compression à deux corps de pompe inégaux?

32. On a un ballon A de v litres, fermé par un robinet et rempli exactement par de l'eau qui tient en dissolution un poids p connu d'un certain gaz, et l'on sait que, si la surface supérieure de l'eau était pressée par une atmosphère de même gaz, ce liquide en dissoudrait un poids tel que la densité du gaz dissous serait égale à m fois la densité du gaz libre. On met le ballon en communication avec un récipient vide B, dont la capacité est de n litres. On demande quel est le poids x de gaz qui doit s'échapper du liquide et se répandre dans B.

33. Dans un tube conique ouvert par les deux bouts et dont l'axe est horizontal, une petite colonne liquide qui mouille les parois intérieures du tube se porte, comme on sait, vers le sommet du cône. Démontrer que dans ce mouvement la force accélératrice qui le produit augmente de plus en plus.

34. Quel est l'angle θ que l'axe d'un cube conique de verre ouvert par les deux bouts doit former avec l'horizon pour qu'une petite colonne d'eau demeure en équilibre dans ce tube, le milieu de l'axe de cette colonne étant à une distance a du sommet du cône? On donne la longueur $2b$ de l'axe de la colonne li-

quide, et la hauteur h à laquelle l'eau s'élèverait au dessus de son niveau hydrostatique dans un tube cylindrique de verre dont le diamètre intérieur serait égal à celui de la colonne en son milieu.

35. Les données sont les mêmes qu'au numéro précédent, si ce n'est que l'axe du tube est horizontal, et qu'on ferme l'extrémité C la plus étroite de ce tube. Pour que la colonne d'eau soit maintenue en équilibre par l'élasticité de l'air compris entre le liquide et l'extrémité C du tube, quel doit être l'excès de cette élasticité sur la pression atmosphérique? (On prendra pour inconnue la hauteur x de la colonne d'eau qui mesurerait cet excès d'élasticité.)

36. Un prisme solide rectangulaire très étroit, dont l est la largeur, h la hauteur et a la longueur, est placé sur un liquide de manière que son grand côté a soit horizontal, et il déprime le liquide autour de lui. Soit q la dépression moyenne de ce liquide au dessous du niveau ambiant dans un tube cylindrique de même matière que le prisme et dont le rayon intérieur serait l. Soit iD la densité du prisme, celle du liquide étant D. Calculer la profondeur x dont le prisme s'abaisse au dessous du niveau. Déduire de la valeur de x la condition nécessaire pour que le prisme ne plonge pas en entier dans le liquide, quoique le solide soit plus dense que le liquide.

CHAPITRE IV.

PROBLEMES SUR LA CHALEUR.

1. Quel serait le coefficient α de la dilatation des gaz, si l'on partait du zéro du thermomètre de Farenheit, et si l'on prenait pour unité de température un degré de ce thermomètre?

2. Une sphère solide, dont le rayon est de r décimètres à 0°, pèse p grammes dans de l'air sec à t° sous la pression de h centimètres. k est le coefficient de dilatation cubique de la matière de la sphère. Quel serait le poids x de cette sphère dans le vide?

3. Un matras plein d'eau pure contient à 0° 124g de ce liquide. Pendant qu'on chauffe ce vase jusqu'à 100°, il laisse échapper progressivement 6g d'eau. Conclure de cette expérience la dilatation réelle de l'unité de volume d'eau, connaissant d'ailleurs le coefficient de la dilatation cubique du verre, qui est 0,000026.

4. Un réservoir cylindrique de verre soudé à un

tube capillaire recourbé a été rempli exactement de mercure à 0°; il contient alors 332g de ce liquide. Chauffé dans un bain d'huile, il laisse échapper progressivement 12g de mercure. Sachant que le coefficient de la dilatation apparente du mercure dans le verre est égal à $\frac{1}{6480}$, estimer en degrés du thermomètre à mercure la température *t* à laquelle a été porté le bain d'huile.

5. Apprécier l'erreur que l'on commet en écrivant $\delta = d + k$, c'est-à-dire en supposant que le coefficient δ de la dilatation absolue d'un liquide soit égal au coefficient *d* de sa dilatation apparente dans un vase, plus au coefficient *k* de la dilatation cubique de la matière du vase.

6. Après avoir laissé échapper une partie de l'air sec qui était comprimé dans un récipient, on ferme le robinet, et l'on observe au même instant la hauteur *h* d'un manomètre qui communique avec l'intérieur du vase. Lorsque l'air qui reste dans ce vase est revenu à la température ambiante T, on note la hauteur H du manomètre. Quelle était la température *t* de l'air intérieur au moment où il a été refroidi par sa raréfaction?

7. *m*g d'un liquide A et *m'*g d'un solide A' occupent ensemble à 0° *v* divisions dans un tube gradué en parties de capacités égales. On demande le nombre x de divisions que le mélange occupera dans ce tube à *t*°. On connait les coefficients de dilatation cubique

a, a', a'', du liquide A, du solide A' et de la matière du tube, ainsi que les densités d et d' de A et de A' à 0°.

8. On demande le rapport des poids m et m' de mercure et de platine qu'il faut introduire à 0° dans un vase de fer, pour que dans ce vase la dilatation apparente du mélange soit nulle de 0° à t°. On suppose la température t comprise entre 0° et 100°. On donne les densités d et d' du mercure et du platine à 0°, ainsi que les coefficients de dilatation cubique a, a', a'' du mercure, du platine et du fer.

Données numériques :

$$d=13{,}6;\ d'=21;\ a=\frac{1}{5550};\ a'=\frac{1}{37700};\ a''=\frac{1}{28200}.$$

9. Deux boules, l'une d'un solide A, l'autre d'un solide A', pesées dans de l'eau à 0°, y ont le même poids apparent. Quel serait le rapport $\frac{p}{p'}$ des poids apparents de ces deux boules dans de l'eau à 8°,2? On suppose que la densité d de l'eau soit la même à 8°,2 qu'à 0°. D et D' sont les densités des solides A et A' à 0°; k et k' sont les coefficients de leurs dilatations cubiques.

Evaluer numériquement le rapport demandé, en supposant que A soit du cuivre, A' du verre, et qu'on ait $d=1$; $D=8{,}8$; $D'=2{,}5$; $k=\frac{1}{19400}$, et $K'=\frac{1}{38700}$.

10. Deux ballons, dont les capacités sont v, v', et qui communiquent entre eux par un tube très étroit muni d'un robinet, sont pleins d'un gaz sec dont la température primitive est 0° et la densité d. Si l'on élève l'un des ballons à $t°$ et l'autre à $t'°$, températures qu'on rend constantes en plongeant les deux ballons dans des masses liquides, quelles seront les densités δ, δ', du gaz dans ces deux ballons?

11. Représenter la dilatation absolue y du mercure de 0° à $t°$ du thermomètre à air par la formule empirique $y=\frac{t}{a-bt}$, sachant que de 0° à 100°, 200°, 300° (du thermomètre à air), les dilatations de ce liquide sont $\frac{1}{55,5}$, $\frac{2}{54,25}$, $\frac{3}{53}$. Après avoir déterminé les constantes a et b, construire géométriquement l'équation obtenue, en regardant y et t comme des coordonnées rectangulaires.

12. Essayer si la loi des contractions qu'éprouve l'éther sulfurique refroidi dans une enveloppe de verre pourrait être représentée approximativement par la formule empirique $z=at-bt^2$.

Le volume d'une certaine masse d'éther étant désigné par 1000 à 35°,56, température de son ébullition sous 76^{cm}, z est le nombre de parties dont ces 1000 parties sont diminuées pour un refroidissement de $t°$ au dessous de 35°,56. a et b sont des constantes qu'on déterminera en admettant 1° que $z=40,37$ pour $t=25,9$; 2° que $z=74,04$ pour $t=51,6$.

La formule obtenue devra être vérifiée à l'aide des observations que renferme le tableau suivant :

Abaissements de température.	Contractions observées.
6°,1	9,88
12,2	19,76
20,3	32,27
31,0	47,81
40,5	59,56
55,4	78,84

13. Pourquoi se forme-t-il un nuage sous le récipient d'une machine pneumatique dès les premiers coups de piston, et pourquoi la rentrée subite de l'air dissipe-t-elle ce nuage ?

14. On suppose que le mercure à t° s'élève jusqu'à h^{cm} dans le tube d'un baromètre à mercure. On demande à quelle hauteur un liquide volatil A monterait au même instant dans un baromètre construit avec ce liquide. La température t est inférieure à 100° ; la densité du mercure à t° est à celle du liquide A à t° comme d est à 1 ; enfin l'élasticité de la vapeur de A est exprimée à t° par f^{cm} de mercure.

15. Le couvercle d'une marmite de Papin est muni d'une soupape de sûreté (à poids) où la petite base du cône tronqué qui s'applique sur l'ouverture a un diamètre de 7 millimètres. De combien de kilogrammes doit être au moins le poids de la soupape, pour que la température de l'eau puisse être portée

dans la marmite jusqu'à 172°,1 du thermomètre à mercure? On suppose que l'air ait été chassé du vase, que l'air ambiant soit soumis à la pression moyenne de l'atmosphère, et que l'élasticité de la vapeur d'eau soit de 8 atmosphères à 172°,1.

16. On a observé que dans le voisinage de 100° l'élasticité de la vapeur aqueuse varie d'environ 27^{mm}, quand la température de la vapeur varie d'un degré. Comment déduirait-on ce résultat de la formule empirique qui satisfait aux expériences de MM. Dulong et Arago sur l'élasticité de la vapeur aqueuse?

17. A quelle température t le poids de la vapeur aqueuse nécessaire pour saturer un espace de 10 mètres cubes est-il égal à un kilogramme?

18. L'air étant à 10° au coucher du soleil, quel est le degré x que doit marquer au moins l'hygromètre à cheveu pour qu'il se dépose de la rosée sur les plantes? On suppose que l'air soit calme et le ciel serein, et que le rayonnement nocturne puisse abaisser la température des plantes de 7° au dessous de celle de l'air ambiant.

19. A quelle température x faudrait-il élever de l'air parfaitement sec, pour que, sous la même pression h, sa densité fût égale à celle de l'air humide dont la température serait t et où l'hygromètre à cheveu marquerait n°?

Exemple numérique : $h = 760^{mm}$, $t = 25$ et $n = 90$.

20. Un vase inextensible qui est fermé contient de l'air à 0° du thermomètre et à 78° de l'hygromètre à cheveu. Cet air étant élevé à la température de 20° sans recevoir de nouvelle vapeur, on demande à quel degré y descendra l'hygromètre.

21. Un récipient fermé, dont la capacité est invariable et égale à un mètre cube, contient de l'air humide à 10° du thermomètre et à 88° de l'hygromètre à cheveu. 1° Combien vaut de milligrammes le poids de la vapeur aqueuse renfermée dans cet espace? 2° La température venant à baisser de 10° dans cet espace, quel degré y marquera l'hygromètre? Une portion de la vapeur se liquéfiera-t-elle? Et, si cet effet se produit, quel sera le rapport du poids de la portion liquéfiée au poids total de la vapeur?

22. 2 mètres cubes d'air humide à 5° et 3^{mc} d'air humide à 15°, soumis à la même pression, viennent à se mélanger intimement. Ce mélange occupe 5^{mc}. On trouvera sans peine que sa température doit être à peu près de 11°. Cela posé, l'on demande à combien de degrés se fixera dans ce mélange un hygromètre à cheveu, qui, plongé successivement dans chacune des deux masses d'air, marquait 90° dans la première et 91° dans la seconde.

Les tensions maxima de la vapeur d'eau à 5°, à 11° et à 15°, sont $6^{mm},9$, $10^{mm},1$ et $12^{mm},8$.

Extrait de la *Table hygrométrique* de M. Biot.

Degrés de l'hygromètre.	Tensions de la vapeur.	Degrés de l'hygromètre.	Tensions de la vapeur.
0°	0,0	91	81,1
. . . . .	. . . . .		
88	75,3	92	83,1
89	77,2	93	85,1
		. . . . .	. . . . .
90	79,1	100	100,0

23. On expose à l'air atmosphérique un thermomètre dont la boule est couverte d'une légère couche d'acide sulfurique concentré, et l'on voit que ce thermomètre monte de n°. Le même thermomètre couvert d'une couche égale du même acide est plongé ensuite dans de l'air saturé de vapeur aqueuse à la même température, et s'y élève de N°. M. A. Delarive a proposé de mesurer approximativement le degré d'humidité de l'air par la fraction $\frac{n}{N}$. Sur quels principes est fondée cette approximation? Paraît-elle satisfaisante?

24. Si l'on avait des thermomètres à mercure, à huile d'olive, à alcool, à eau, dont les enveloppes et les réservoirs fussent identiques, lequel de ces thermomètres emprunterait ou cèderait le moins de chaleur aux corps environnants pour se mettre en équilibre de température avec eux?

25. On verse 1000g d'eau à 90° sur 1000g de glace à —10°, et l'on obtient 2000g d'eau liquide à +3°.

Un glaçon à —10°, qui pèse 100g, étant plongé dans une masse d'eau liquide à 0°, la température de ce glaçon remonte promptement à 0°, et son poids est alors augmenté de 12g.

Conclure de chacune de ces expériences le rapport x de la chaleur spécifique de la glace à celle de l'eau.

26. Deux corps A et A' dont les chaleurs spécifiques sont c et c', en se combinant entre eux dans le rapport de p à p', forment un *composé* dont la chaleur spécifique est c''. Comment peut-on reconnaître si la chaleur spécifique observée c'' est plus grande ou plus petite que celle d'un *mélange* des deux corps A et A' opéré dans le rapport de p à p'?

Exemple : A et A' étant du soufre et du plomb, on a

$$\begin{cases} p = 201^g,16\ldots\ldots \\ p' = 1294^g,5\ \ldots\ldots \end{cases} \begin{cases} c = 0,1880\ldots\ldots \\ c' = 0,0293\ldots\ldots \end{cases} \quad \text{et } c'' = 0,046.$$

27. Un calorimètre d'eau contenait 580g de ce liquide. Les parois et le serpentin, qui étaient en cuivre, pesaient 429g,47, et l'on sait que la chaleur spécifique du cuivre est les 0,095 de celle de l'eau. On a fait passer dans l'appareil une masse d'air à 96°, telle qu'à 0° et sous 76cm elle eût occupé 83l,40. Le gaz est sorti du calorimètre avec une température moyenne égale à 11°, après avoir échauffé l'eau de

4 degrés. On demande le rapport x de la chaleur spécifique de l'air à celle de l'eau.

28. On met en contact m^g de vapeur aqueuse à 100°, m'^g d'eau à $t°$ et m''^g de glace à 0°. Si la glace et la vapeur sont totalement liquéfiées par ce mélange, quelle sera la température x de l'eau qu'on obtiendra ?

29. Dans l'expérience de Leslie, où l'eau se congèle dans le vide, supposons que les m^g d'eau employés et tout l'appareil soient primitivement à 0°, et qu'on détermine le poids m' du glaçon à l'instant où toute l'eau qui ne s'est pas vaporisée est congelée et est encore à 0°. Pourrait-on déduire des nombres m, m' et 75, le nombre x d'unités de chaleur que 1^g d'eau à 0° absorbe pour se vaporiser ?

30. On fait passer 100^g de vapeur d'éther (sulfurique) à 35°,5 dans 3875^g d'éther à 7°, la température ambiante étant de 10°, et l'on obtient 3975^g d'éther liquide à 13°. On sait d'ailleurs que, pour s'échauffer de 1°, 1^g d'éther exige les 0,52 d'une *unité de chaleur* (c'est-à-dire de la quantité de chaleur qui élèverait 1^g d'eau de 1°). Conclure de ces données le nombre x d'unités de chaleur que 1^g d'éther absorbe pour sa vaporisation.

31. Un kilogramme d'étain en se refroidissant dans un calorimètre de glace d'abord de $t°$ à 0°, puis de $t'°$ à 0°, puis enfin de $t''°$ à 0°, a fondu successi-

vement a, a', a'' kilogrammes de glace à 0°. θ étant la température de congélation de l'étain liquide, on a $t<\theta<t'<t''$. On demande d'après ces données le nombre x de kilogrammes de glace qui seraient fondus par la chaleur qu'un kilogramme d'étain dégage en se solidifiant.

52. On introduit 1^k d'étain solide à $t°$ dans un vase de cuivre qui pèse p^k, et qui renferme M^k d'eau pure à 0°. Un poids m de cette eau se vaporise d'abord à 100° environ; le reste de l'eau et l'étain parviennent bientôt à la température b, qu'on note avec soin.

On verse ensuite 1^k d'étain liquide à $t'°$ dans un vase de cuivre qui pèse p'^k, et qui contient M'^k d'eau à 0°. Un poids m' de cette eau se vaporise à 100°; le reste de l'eau, et l'étain, qui s'est solidifié, se fixent à la température commune b'.

Enfin l'on verse 1^k d'étain liquide à $t''°$ dans un vase de cuivre qui pèse p''^k, et qui contient M''^k d'eau à 0°. Un poids m'' d'eau se vaporise à 100°; le reste de l'eau, et l'étain, qui s'est solidifié, se fixent à la température b''.

On connaît la chaleur spécifique v du cuivre, la chaleur l absorbée par 1^k d'eau qui se vaporise à 100°, et la température θ de la congélation de l'étain liquide.

On demande d'après ces données 1° la chaleur spécifique moyenne c de l'étain solide entre $\theta°$ et $b°$, 2° la chaleur spécifique moyenne c' de l'étain liquide depuis $t'°$ ou $t''°$ jusqu'à $\theta°$, 3° la chaleur x dégagée par la solidification de 1^k d'étain liquide.

33. Un anneau plat de fer fortement chauffé a été plongé dans une masse d'eau à 0° contenue dans un vase de cuivre à 0°, et la température du système s'est fixée à θ°. On demande la température initiale t du fer, connaissant son poids m, sa chaleur spécifique c, le poids p de l'eau, sa chaleur spécifique 1, le poids m' du cuivre et sa chaleur spécifique c'. On devra aussi tenir compte du faible poids p' de l'eau qui s'est vaporisée à 100° environ, au moment de l'immersion de l'anneau.

On pourra supposer $\theta=20°$; $m=2000^g$; $c=0,13$; $p=6430^g,7$; $m'=600^g$; $c'=0,095$; $p'=0^g,4$; enfin $l=535$, en désignant par l la chaleur que 1^g d'eau absorbe pour se vaporiser à 100°.

34. Deux anneaux plats de même métal qui pèsent p^g et p'^g étant à une haute température x, on les plonge respectivement dans des masses d'eau dont les poids sont m et m' et dont les températures sont t et t'. Les températures finales des mélanges sont θ et θ'. Cela posé, on demande la température x commune aux deux anneaux.

Cette méthode pyrométrique est-elle préférable à celle où l'on plonge dans l'eau froide un seul anneau chauffé jusqu'à la température cherchée x, et où l'on se donne la chaleur spécifique du métal ?

35. A quelle température t du thermomètre à air faudrait-il élever des poids égaux de cuivre et de zinc pris à 0°, pour que les quantités y, y', de chaleur reçues par eux fussent égales?

D'après Dulong et Petit les chaleurs spécifiques

moyennes du cuivre et du zinc sont respectivement 0,0949 et 0,0927 entre 0° et 100°, tandis qu'entre 0° et 300° du thermomètre à air elles sont 0,1013 et 0,1015.

36. Evaluer le nombre d'unités de chaleur dégagées par la combustion d'un gramme 1° d'essence de térébenthine, 2° de cire blanche, 3° d'huile d'olive, 4° de suif, 5° d'éther sulfurique, 6° d'alcool pur, en supposant que la combustion soit complète et produise de la vapeur d'eau et du gaz acide carbonique.

La chaleur qui élève 1g d'eau pure de 1°(C) étant prise pour unité, on admet, d'après les expériences de M. Despretz, que 1g de carbone dégage en brulant 7914 unités de chaleur, et que 1g d'hydrogène en dégage 23640. La composition chimique des substances proposées est indiquée par le tableau suivant :

	Carbone.	Hydrogène.	Oxigène.
Essence de térébenthine (1). . .	88,40	11,60	0
Cire blanche (2).	81,607	13,859	4,534
Huile d'olive (3).	77,21	13,36	9,43
Suif (4)	79,00	11,70	9,30
Ether sulfurique (5).	64,96	13,47	21,57
Alcool pur (6).	52,28	13,02	34,70

Noms des observateurs : (1) M. Dumas, (2) M. Th. De Saussure, (3) MM. Gay-Lussac et Thénard, (4) M. Chevreul, (5) et (6) MM. Dumas et Boullay.

37. Quel devrait être le rayon de courbure R d'un miroir sphérique concave de laiton poli pour que la concentration de la chaleur solaire fût la même à son foyer qu'à celui d'une lentille plan-convexe de sel gemme? On connaît le rayon de courbure r de cette lentille, et l'on suppose que la convexité de la lentille et la concavité du miroir soient des zones semblables. On néglige les aberrations de sphéricité et de réfrangibilité.

38. Un thermomètre à surface vitreuse se refroidit d'abord dans une enceinte entretenue à une température constante et renfermant un gaz. Soit v sa vitesse totale de refroidissement pour un excès t de température.

La surface du même thermomètre ayant été argentée, il se refroidit dans la même enceinte maintenue à la même température et contenant le même gaz sous la même pression. Soit v' la vitesse totale de refroidissement pour le même excès t de température.

Quel devrait être cet excès t pour que le rapport de la vitesse v à la vitesse v' fût un *minimum?*

39. On suppose que dans les deux expériences du numéro précédent la surface du thermomètre reste la même, et que dans la seconde expérience le gaz soit soumis à une pression moindre que dans la première. Soit v'' la vitesse totale de refroidissement pour le même excès t de température, quand le gaz est raréfié. Quel devrait être cet excès t pour que le rapport de v à v'' fût un *maximum?*

40. Supposons que dans la seconde expérience du n° 38 on ait fait varier à la fois la surface du thermomètre et l'élasticité du gaz ambiant. Désignons par u la vitesse totale de refroidissement qui a lieu pour l'excès t de température, lorsque le thermomètre est argenté et le gaz raréfié. Le rapport de la vitesse v à la vitesse u est-il susceptible d'un *minimum* ou d'un *maximum?* Quel est l'excès t de température qui répond à ce *minimum* ou à ce *maximum?*

CHAPITRE V.

PROBLÈMES D'ÉLECTRICITÉ.

1. Comment pourrait-on enlever à une sphère métallique isolée les deux tiers de son électricité libre?

2. Une boule de moelle de sureau suspendue à un long fil de soie est placée à égale distance entre deux sphères métalliques isolées de même diamètre, dont l'une A est électrisée et dont l'autre B est d'abord à l'état naturel. On suppose l'air très sec, et la distance mutuelle des deux sphères assez grande pour qu'il n'y ait pas d'étincelle entre ces deux corps. Quels seront les phénomènes de mouvement ou d'équilibre que présentera le petit pendule? Si au bout de quelque temps on touche un instant la sphère B avec le doigt, quel sera l'effet de ce contact?

3. Comment faut-il disposer et *armer* une tourmaline qu'on vient de chauffer, si l'on veut s'en servir pour faire osciller pendant quelque temps un petit pendule isolé?

4. Ayant chargé une bouteille de Leyde, on pose sur un isoloir son armure extérieure b et l'armure extérieure b' d'une seconde bouteille non électrisée d'abord. b et b' sont liées ensemble par une feuille de métal. On fait ensuite communiquer à l'aide d'un excitateur isolé 1° l'armure intérieure a' de la seconde bouteille et l'armure intérieure a de la première, 2° les armures a et b, 3° les armures a' et b', et l'on obtient ainsi trois étincelles successives. Expliquer cette expérience.

5. Soit une bouteille de Leyde qui ait deux armures extérieures b et b' séparées l'une de l'autre par une zône de verre. On électrise son armure intérieure a en faisant communiquer b avec le sol et en isolant b'. La bouteille étant posée ensuite sur un isoloir, on établit la communication, à l'aide d'un excitateur isolé, 1° entre b' et b, 2° entre b' et a, 3° entre a et b. On tire ainsi trois étincelles. Expliquer cette expérience.

6. Déterminer, par la méthode des oscillations horizontales, dans quelles proportions l'électricité libre se partage entre un globe métallique électrisé et un corps conducteur de figure quelconque mis en contact un instant avec ce globe.

7. En appliquant la balance de torsion à la recherche de la loi des répulsions électriques, quelle erreur commet-on, lorsque l'on compte la distance des deux boules suivant l'arc $2a$ qui les sépare, et

qu'en même temps on suppose leur répulsion directement opposée à la force de torsion?

8. Un petit *plan d'épreuve*, posé successivement sur deux éléments A et A' d'une surface métallique électrisée et isolée, a été fixé dans la balance de torsion au zéro de la division circulaire, et a repoussé le clinquant mobile d'abord jusqu'à 10°, et ensuite jusqu'à 13° à partir de ce zéro. Ce clinquant, qui est electrisé d'avance dans le même sens que le plan d'épreuve, ne le touche pas avant d'être repoussé par lui. Le fil de suspension n'éprouvait aucune torsion au commencement de l'expérience, et le levier qu'il soutient répondait alors au zéro. Quand ce levier a pris soit sapremière, soit sa seconde position d'équilibre, le fil n'est tordu que par en bas. L'air dans lequel on opère est très sec. D'après ces données déterminer le rapport $\frac{e'}{e}$ des quantités d'électricité répandues sur les éléments A' et A.

9. Comment appliquerait-on la balance ordinaire à la recherche de la loi des attractions et répulsions électriques?

10. Une petite boule de moelle de sureau recouverte d'une mince feuille d'or est fixée à l'extrémité d'une longue aiguille de verre qui peut se mouvoir horizontalement autour de son point milieu F (fig. 23). Deux sphères de métal électrisées dans le même sens et isolées ont leurs centres C et C' sur la circon-

férence de cercle que peut décrire la boule. Cette boule étant électrisée dans le même sens que les deux sphères, on la place entre elles, elle s'y met en équilibre, et quand cet équilibre est obtenu, l'on observe les arcs θ et θ' qui séparent le centre A de la petite boule des centres C et C'. Déduire de cette observation le rapport des quantités e, e', d'électricité libres sur les deux sphères.

11. La répulsion mutuelle de deux boules électrisées, maintenues constamment à 30° l'une de l'autre dans la balance électrique, est d'abord représentée par une force de torsion de 150°, la torsion supplémentaire étant de 120°. On observe qu'au bout de chaque minute cette répulsion diminue de $\frac{1}{41}$ de la valeur moyenne qu'elle a manifestée durant cette minute. Que sera devenue cette force répulsive au bout de 45'?

12. Pour comparer la déperdition lente de l'électricité négative dans l'air à celle de l'électricité positive, M. Biot a employé la balance de torsion, en électrisant dans le même sens, tantôt négativement, tantôt positivement, la boule fixe et le disque mobile, et en observant les angles de répulsion à diverses époques déterminées avec un chronomètre à demi-secondes. La force de torsion était d'abord nulle lors du contact de la boule et du disque, et elle n'était produite à chaque instant que par l'écart variable de ce disque. Le tableau suivant indique

les résultats que M. Biot a obtenus successivement pour les deux électricités :

Nature de l'électricité.	Epoques.		Angles de répulsion.	
Négative	10h	41'	68°	51'
		59	63	27
	12	25	34	39
Positive	1	7	61	12
		25	56	15
	2	25	35	33

Comment déduirait-on de ces nombres le rapport a de la force répulsive perdue à la force répulsive moyenne durant chaque minute dans le cas de l'électricité négative, et le rapport semblable a' correspondant à l'électricité positive ?

CHAPITRE VI.

PROBLÈMES DE MAGNÉTISME ET D'ÉLECTRO-MAGNÉTISME.

1. Comment appliquerait-on la balance ordinaire à la recherche de la loi des attractions et répulsions magnétiques ?

2. Comment pourrait-on, à l'aide de deux paires d'aimants, aimanter un anneau d'acier de manière à y faire naitre en deux points donnés des pôles contraires doués de la plus grande énergie possible ?

3. Sur le milieu d'une aiguille à coudre non aimantée on pose l'une des extrémités d'un barreau aimanté, de manière que son axe soit perpendiculaire à celui de l'aiguille. Si au bout d'un certain temps on retire l'aimant en l'enlevant dans la direction de son axe, dans quel état magnétique laissera-t-il l'aiguille?

4. On a une aiguille aimantée *ab* qui, fixée à une plaque flottante de liége, ne peut se mouvoir sur

l'eau qu'en demeurant toujours verticale. Si l'on fixe au dessus de cette aiguille un barreau aimanté AB dont l'axe soit horizontal et coupé en son milieu par l'axe prolongé de l'aiguille, dans quel sens marchera-t-elle, et quelle sera la position d'équilibre où elle viendra s'arrêter ?

5. Les pôles α et β d'une aiguille aimantée étant soumis aux actions répulsives et attractives des pôles A et B d'un aimant, on demande l'angle aigu θ que l'aiguille $\alpha\beta$ doit former avec AB pour être en équilibre. Un point O de cette aiguille est fixe, elle est soustraite aux actions du globe, et ne peut se mouvoir que dans le plan qui passe par le point O et par les deux autres points fixes A et B.

On donne la distance $2c$ du pôle A au pôle B, les distances a et b du point O aux pôles α et β, la distance h du point O à la droite AB, et la distance p du même point O à la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB dans le plan ABO.

6. On a deux petites aiguilles aimantées ab, $a'b'$, de mêmes dimensions, qui, suspendues séparément dans une direction horizontale, feraient respectivement, sous l'influence du globe, n et n' oscillations par minute autour du méridien magnétique. On fixe ces deux aiguilles par leurs centres à la même tige verticale surmontée d'un fil de soie, de manière que leurs axes soient dirigés dans le même plan vertical, l'un ab horizontalement, l'autre $a'b'$ formant avec l'horizontale un angle aigu x. Quelle doit

être la valeur de cet angle pour que le système des deux aiguilles soit astatique?

7. On a deux petites aiguilles aimantées ab, $a'b'$, de mêmes dimensions, qui, suspendues séparément dans une direction horizontale, feraient respectivement, sous l'influence du globe, n et n' oscillations par minute autour du méridien magnétique.

Ces deux aiguilles étant suspendues par une mince tige verticale au même fil de soie dans des directions horizontales et parallèles, quels seront les nombres x et y d'oscillations que leur ensemble fera par minute, 1° quand les pôles de même nom seront tournés du même côté, 2° quand les pôles de même nom seront tournés en sens contraire?

Si les deux aiguilles fixées l'une sous l'autre horizontalement formaient entre elles un angle α, quel serait l'angle ε que l'une d'elles ab devrait faire avec le méridien magnétique pour que le système (ab, $a'b'$) fût en équilibre?

Si le système *croisé* (ab, $a'b'$) était écarté de cette position d'équilibre, quel serait le nombre z d'oscillations qu'il exécuterait par minute?

8. Une aiguille aimantée AB, longue et bien trempée, étant suspendue horizontalement sur un pivot ou par un fil de soie sans torsion, se dirige dans le méridien magnétique.

Sur le prolongement de son axe CA, du côté de son pôle austral A, on place le pôle austral P d'un aimant M, et l'aiguille est déviée de θ degrés.

On remplace ensuite l'action du pôle P par celle du pôle austral P′ d'un second aimant M′, P′ étant fixé aussi sur le prolongement de l'axe CA, et l'aiguille s'arrête alors à θ' degrés de son méridien.

On connaît le bras de levier CA ou l du pôle austral de l'aiguille, et les distances successives CP ou a, CP′ ou a', du point fixe C de l'aiguille aux pôles P et P′ qui la repoussent.

Cela posé, on demande le rapport approché $\frac{R}{R'}$ des forces des deux aimants M et M′.

9. On a une aiguille aimantée ab (fig. 24) qui, attachée à une plaque flottante de liége, ne peut se mouvoir sur l'eau qu'en demeurant toujours verticale.

On fixe verticalement au dessus de ab deux longs aimants M et M′ qui sont à une distance connue $2c$ l'un de l'autre, et dont les pôles de même nom se regardent. Leurs pôles inférieurs A et A′ sont de nom contraire au pôle supérieur b de l'aiguille mobile. La hauteur commune Kb ou h de A et de A′ au dessus de b est trop grande pour que A ou A′ puisse soulever ab sensiblement. L'aiguille soumise aux actions de ces barreaux s'arrêtera dans une certaine position. Pourrait-on déduire de cette position d'équilibre le rapport approché $\frac{R}{R'}$ des forces des deux aimants M et M′ ?

10. Dans un lieu L, où l'on connaît l'inclinaison i, une aiguille aimantée suspendue par son centre

de gravité G est maintenue horizontalement par un contrepoids appliqué sur son axe à une distance a de ce centre. La même aiguille, transportée dans un autre lieu L′ où l'inclinaison est i', s'y maintient horizontalement quand le même contrepoids est appliqué à une distance a' du centre G. En outre on suppose que les intensités de la pesanteur en L et en L′ soient entre elles comme g est à g'. On demande le rapport des intensités R, R′, des actions magnétiques du globe terrestre dans les lieux L et L′.

11. Coulomb a constaté que les moments magnétiques de deux aiguilles très courtes de même diamètre aimantées à saturation sont à peu près comme les carrés de leurs longueurs. Par quelles considérations théoriques arriverait-on à cette loi approchée ?

12. Si l'on fait osciller horizontalement sous l'influence du globe des aiguilles cylindriques très courtes de même diamètre aimantées à saturation, on trouve que les nombres d'oscillations qu'elles exécutent dans le même temps sont à peu près en raison inverse des racines carrées de leurs longueurs (1). Par quelles considérations théoriques arriverait-on à cette loi approchée ?

13. Construire un nouveau rhéoscope (*galvano-*

(1) Nous avons vérifié nous-mêmes cette loi par l'expérience.

scope ou *galvanomètre*) dont les indications aient pour base les attractions et les répulsions qu'un fil rhéophore exerce sur une aiguille aimantée qui lui est perpendiculaire et qui peut se mouvoir perpendiculairement à son axe magnétique. Indiquer les dispositions les plus favorables du fil métallique et de l'aiguille pour porter au plus haut degré la sensibilité de cet instrument.

14. Une aiguille aimantée *ab* (fig. 25) qui flotte horizontalement sur l'eau, s'étant dirigée dans le méridien magnétique, on fixe un peu au dessus du niveau un long fil rhéophore dans une direction horizontale et perpendiculaire à celle de l'aiguille.

On fixe aussi horizontalement un long aimant AB dans le plan vertical C*ab* mené par l'aiguille. Le courant et l'aimant sont dirigés de manière que le centre O de l'aiguille vienne se placer entre les projections P et P′ du courant C et du pôle influent B de l'aimant.

Cet équilibre étant établi, l'on mesure la distance OP ou x. On connaît de plus les hauteurs CP ou h, BP′ ou h', et les distances PP′ ou d, ab ou $2l$.

On recommence ensuite l'expérience en substituant au fil C un fil C′ qui transmet un autre courant, et en plaçant avec soin ce second rhéophore dans la position que le premier occupait. Quand l'aiguille s'est mise en équilibre, on note la distance x' du point O à la projection du nouveau fil sur ab.

Il s'agit d'évaluer d'après ces données le rapport des intensités des deux courants (1).

15. On a une aiguille aimantée à trois pôles, dont les deux pôles extrêmes A et A′ sont de même force et équidistants du centre, où se trouve le pôle intermédiaire B. Cette aiguille étant mobile autour de son centre dans un plan horizontal, si l'on fixe près d'elle un fil rhéophore vertical d'une longueur indéfinie, quelle est la condition nécessaire pour que l'aiguille soit en équilibre ?

P étant la projection du courant sur le plan horizontal où l'aiguille peut se mouvoir, on connaît la distance x du point P à l'aiguille AA′ ou à son prolongement, et la distance y du même point à la perpendiculaire élevée sur l'aiguille par son centre B dans le plan AA′P. En outre on suppose que $2l$ soit la distance du pôle austral A au pôle austral A′.

(1) L'aiguille *ab* doit être assez fortement trempée pour que son état magnétique ne soit modifié ni par l'aimant AB ni par les deux courants.

CHAPITRE VII.

PROBLÈMES D'ACOUSTIQUE.

1. Transformer 1° l'accord parfait majeur *ut mi sol* en accord parfait mineur, 2° l'accord parfait mineur *la* ut_2 mi_2 en accord parfait majeur, en modifiant convenablement le son intermédiaire de chacun de ces accords ou bien les deux sons extrêmes.

2. Quelles seraient les définitions musicale et arithmétique de l'accord *si* re_2 fa_2? Comment le transformerait-on en accord parfait 1° majeur, 2° mineur ?

3. Ecrire la valeur numérique de l'intervalle d'octave sous une forme propre à faire ressortir les nombres de tons majeurs, de tons mineurs et de demi-tons majeurs dont se compose la gamme diatonique.

4. Comment faudrait-il altérer la tierce majeure *ut mi* ou la tierce mineure *ut* $mi^{\flat}$ pour que l'octave *ut* ut_2 résultât exactement de trois tierces majeures

successives ou de quatre tierces mineures? Ces altérations s'accorderaient-elles avec celles que les tierces majeure et mineure reçoivent dans le tempérament égal?

5. On sait que la succession de deux *quintes diminuées* ($ut\ sol^{\flat}$) ne devrait former qu'une octave ($ut\ ut_2$), et que la succession de trois *quintes superflues* ($ut\ sol\sharp$) devrait embrasser deux octaves complètes ($ut\ ut_3$). Ces deux conditions, auxquelles la gamme *enharmonique* ne satisfait pas, sont-elles remplies par la gamme *chromatique* tempérée?

6. Pour accorder l'orgue et le clavecin on a long temps employé le procédé qui suit :

A partir de l'*ut*, qu'on peut appeler *son fixe*, une suite de quatre quintes ascendantes également affaiblies conduisait à un mi_2 qui, ramené dans les limites de l'octave du son fixe, donnait avec ce son une tierce juste.

A partir de ce mi_2 quatre autres quintes ascendantes de même valeur que les précédentes conduisaient à un $sol\sharp$, qui, ramené dans l'octave du son fixe, donnait une tierce juste avec le premier *mi*.

Revenant ensuite à l'*ut* son fixe, on descendait de quatre quintes également forcées, et l'on arrivait à un $la^{\flat}_{-2}$ qui, ramené dans l'octave fondamentale, devait se trouver à l'unisson du $sol\sharp$ obtenu par les quintes ascendantes. On complétait l'échelle chromatique en prenant les octaves convenables des sons déterminés précédemment.

Cela posé, on demande les nombres de vibrations synchrônes qui correspondent aux douze sons de la gamme ainsi modifiée (1).

7. Former une nouvelle gamme où l'on conserve sans altération la première quarte (*ut fa*) en même temps que l'octave ($ut\ ut_2$).

Dans la gamme chromatique actuelle, qui marche par semi-tons égaux, tous les intervalles sont altérés, excepté l'octave, et la relation $y=2^{\frac{x}{12}}$ a lieu entre les nombres y de vibrations synchrônes et les distances x des sons au premier son de la série. On peut essayer de lier x et y par l'équation $y=2^{\frac{ax}{b-x}}$, a et b étant deux constantes qu'il s'agit de calculer

(1) Voyez la page 43 de l'*Instruction élémentaire sur le calcul des intervalles musicaux* publiée en 1832 par M. de Prony.

M. de Prony paraît regretter cette gamme, qu'on peut nommer la *gamme à deux tierces justes*. Elle était particulièrement favorable, dit-il, aux modulations les plus usitées, dans le temps où les compositions musicales n'avaient pas encore perdu leur simplicité des XVI[e] et XVII[e] siècles. M. de Prony trouve que le *tempérament égal*, qui est généralement adopté aujourd'hui par les musiciens, satisfait plus l'esprit que l'oreille; qu'on y sacrifie trop aux quintes et aux quartes, intervalles qui pourraient, sans inconvénient, supporter des altérations plus fortes; que, dans le mode actuel, l'une des altérations les plus graves porte sur les tierces; et que ce défaut, remarqué surtout *en harmonie*, se fait sentir dans toutes les modulations.

de manière à ce que l'octave ($ut\ ut_2$) et la première quarte (*ut fa*) conservent leurs valeurs naturelles.

8. Résoudre la question du numéro précédent par l'emploi des formules

$$1^\circ\ y = A + Bx + Cx^2, \qquad 2^\circ\ y = \alpha + \frac{\beta x}{\gamma - x}.$$

9. Comment faut-il subdiviser le manche de la guitare pour tirer de cet instrument des sons compris entre deux sons consécutifs de l'échelle chromatique tempérée ?

Cet énoncé peut être développé ainsi :

Deux sons consécutifs donnés par la guitare diffèrent entre eux d'un semi-ton moyen. Pour passer du plus grave S de ces deux sons au plus aigu S#, il faut raccourcir la corde vibrante de tout l'intervalle *c* des deux *touches* qui limitent les deux longueurs successives de cette corde. En partant de ce fait, on demande de quelle fraction x de l'intervalle *c* il faut raccourcir la corde qui rend le son S, pour obtenir un son qui soit plus haut que S des $\frac{n}{m}$ d'un semi-ton moyen.

10. Une corde métallique tendue horizontalement est fixée à ses deux extrémités. Ayant appuyé le point milieu de cette corde sur un chevalet de bois ou de métal, on soulève la corde en la tenant par ce point, puis on l'abandonne à elle-même. Les chocs successifs du milieu de la corde contre l'arête

du chevalet produisent pendant quelques instants un son S rauque et désagréable dont on propose d'évaluer le rapport avec le son plus aigû que feraient naître les vibrations transversales de la corde entière, si elle était libre.

11. Trois sons forts et soutenus se faisant entendre à la fois, quels seraient les sons plus graves qui résulteraient de leur coexistence? On peut supposer les trois corps sonores placés aux trois sommets d'un triangle équilatéral dont le centre serait occupé par l'oreille. On choisira pour exemples de sons simultanés 1° *la*, ut_2, mi_2; 2° *fa*, *la*, ut_2.

CHAPITRE VIII.

PROBLEMES D'OPTIQUE.

1. Un point lumineux étant placé au foyer d'un paraboloïde de révolution qu'on suppose un miroir parfait, trouver le rapport x de la lumière qui est réfléchie à la lumière totale qui est émise. On connaît le paramètre $2p$ de la parabole génératrice et la profondeur a du segment métallique.

2. Quelle erreur commet-on en prenant le point milieu du rayon d'un miroir sphérique pour son foyer principal?

3. Deux miroirs sphériques M et M′, l'un concave, l'autre convexe, dont les rayons de courbure sont $2f$ et $2f'$, sont disposés de manière que leurs axes coïncident et que leurs surfaces réfléchissantes se regardent. d est la longueur de la ligne horizontale qui joint leurs centres de figure. En quel point de cette droite faut-il placer une ligne lumineuse verticale pour que les hauteurs des deux images présentées par M et M′ soient entre elles comme m est à m'?

Même question pour le même objet placé perpendiculairement à l'axe commun de deux lentilles diaphanes, l'une biconvexe, l'autre biconcave.

4. Un point lumineux S est situé sur l'axe d'un miroir sphérique concave à égale distance du foyer principal F et du centre C de la sphère. Un miroir plan incliné de 45° sur l'axe du miroir concave coupe cet axe au delà du centre C en un point aussi éloigné de C que C l'est de S.

Déterminer la position de l'image du point S, image que formeraient des rayons lumineux partis de ce point, et réfléchis d'abord par le miroir concave, ensuite par le miroir plan.

Etendre ensuite la construction au cas où l'on remplacerait le point S par un petit cercle lumineux dont le centre serait sur l'axe du miroir concave et dont le plan serait perpendiculaire à cet axe.

5. Des rayons de lumière parallèles entre eux qui tombent sur la circonférence d'un cercle forment par leur réflexion une *caustique* que l'on peut construire par points au moyen de l'équation $\rho = a$, ρ étant la distance d'un point M de la courbe au point I d'incidence qui lui correspond, et a le quart de la corde suivant laquelle se dirige le rayon réfléchi IM.

En admettant l'équation $\rho = a$, démontrer par la géométrie que la caustique dont il s'agit est une épicycloïde plane engendrée par un cercle dont le rayon est le quart du rayon r du cercle réflecteur, et qui roule sur un cercle concentrique à ce dernier et d'un rayon égal à la moitié de r.

6. Démontrer que la déviation minimum v qu'un rayon de lumière simple éprouve en traversant un prisme augmente avec l'angle réfringent a de ce prisme.

Evaluer ensuite l'erreur que l'on commet en prenant $(l-1)a$ pour la déviation produite par un prisme d'un petit angle. (l désigne ici l'indice de réfraction de la matière du prisme.)

7. Deux points L et O étant donnés de position dans l'air, quelle route suivra la lumière pour parvenir de L en O, en traversant une glace interposée à faces parallèles ?

On connaît l'indice l de réfraction du verre, l'épaisseur e de la glace, la distance a du point L à la face d'incidence, la distance b du point O à la face d'émergence, et la distance c des projections des points L et O sur l'une des faces du verre.

8. Des rayons lumineux partis d'un point L situé dans l'air, après avoir traversé un verre à faces parallèles, repassent dans l'air. Trouver une équation avec laquelle on puisse construire le lieu des points de rencontre des prolongements des rayons émergents infiniment voisins.

On connaît l'indice l de réfraction du verre, l'épaisseur e de la glace, et la distance a du point L à la face d'incidence.

9. Déterminer approximativement l'image L′ d'un point lumineux L qui serait produite par la réflexion de la face postérieure d'une glace à faces parallèles,

en supposant l'œil situé près de la perpendiculaire menée du point L sur les faces réfléchissantes.

Outre l'image L' qui est produite par deux réfractions accompagnées d'une réflexion intermédiaire, on pourrait aussi trouver les images plus pâles L''', L^{v},.... L$^{(2n-1)}$, produites par deux réfractions accompagnées de 3, 5,..... $2n-1$ réflexions intermédiaires.

On connaît la distance *a* du point lumineux L à la face antérieure, l'épaisseur *e* de la glace, et l'indice *l* de réfraction du verre.

10. Si l'on regarde un point lumineux L à travers une glace à faces parallèles, on peut voir, outre son image principale λ, des images beaucoup moins vives L'', L^{iv},..... L$^{(2n)}$, qui sont produites par deux réfractions accompagnées de 2, 4,.....$2n$ réflexions intermédiaires. En quels points ces images se forment-elles pour un œil placé très près de la perpendiculaire menée aux deux faces par le point lumineux?

Les données de cette question sont les mêmes que celles de la précédente.

11. On a un miroir concave de verre dont la face antérieure est plane et dont la face postérieure est étamée. On connaît l'indice *l* de réfraction du verre, le rayon *r* de la sphère à laquelle le segment de verre appartient, et l'épaisseur *e* de ce segment. Un point lumineux L étant situé sur l'axe de ce miroir à une distance *a* de sa face antérieure, on demande en

quel point L′ de l'axe est l'image *principale* du point L, c'est-à-dire l'image formée par une seule réflexion sur la face étamée.

12. On a un miroir concave de verre M dont la face postérieure est étamée ; le rayon de courbure de cette face est *r*. La face antérieure présente sa concavité au dehors ; son rayon de courbure est *r′*. L'épaisseur du miroir mesurée suivant son axe est égale à *e*. L'indice de réfraction du verre est *l*.

Des rayons lumineux tombant sur ce double miroir parallèlement à son axe, une partie de la lumière est réfléchie par la face antérieure et vient se concentrer en un point *f* de l'axe. Une autre partie entre dans le verre, se réfléchit sur la face étamée, repasse dans l'air et se réunit sur l'axe en un point F. Le point *f* se nomme un foyer *catoptrique*, et le point F un foyer *catadioptrique*. On demande la relation qui doit exister entre *l*, *e*, *r*, *r′*, pour que les deux foyers F et *f* coïncident.

13. Les données *e*, *l*, *r*, *r′*, relatives au miroir M étant les mêmes qu'au numéro précédent, à quelle distance *a* de la face antérieure faut-il placer sur l'axe un point lumineux L pour que ce point coïncide avec sa propre image? (Il s'agit ici de l'image principale ou *catadioptrique* du point L, c'est-à-dire de celle qui est produite par deux réfractions et une réflexion intermédiaire.)

14. Les données étant les mêmes que dans les deux

numéros précédents, trouver une relation entre l, e, r, r', et les distances focales a et a' conjuguées entre elles relativement au miroir M. a est la distance de la face antérieure à un point lumineux L situé sur l'axe, a' est la distance de la même face à l'image catadioptrique du point L.

Examiner ensuite le cas où le miroir M, au lieu d'avoir la forme d'un ménisque, aurait celle d'une lentille biconcave.

15. Connaissant les deux foyers principaux F et F', le premier dioptrique, le second catadioptrique, d'une lentille biconvexe dont les deux courbures sont égales, on demande le rayon de courbure r de chacune des deux faces et l'indice l de réfraction de la substance de la lentille. On suppose qu'on ait trouvé f et f' pour les deux distances focales principales de la lentille, dont l'épaisseur peut être négligée.

16. On a mesuré le diamètre $2h$ d'une lentille plan-convexe, son épaisseur e, la distance f du centre optique au foyer principal situé du côté de la face convexe, et la distance φ du centre optique au foyer principal situé du côté de la face plane. Calculer l'indice l de réfraction de la matière de cette lentille, 1° en fonction des quantités e, f, h; 2° en fonction de e, h, φ; 3° en fonction de e, f, φ.

17. On connaît l'indice l de réfraction de la matière d'une lentille biconcave, et l'on a déterminé à

l'aide des rayons solaires les foyers catoptriques principaux de ses deux faces. Avec ces données trouver par approximation le foyer dioptrique principal de la lentille.

18. Produire sur un écran une image réelle, droite et agrandie, d'un petit objet lumineux, au moyen d'une lentille biconvexe et d'un miroir sphérique concave disposés convenablement.

On peut opérer de manière à recueillir sur le même écran une image renversée du même objet égale en grandeur à l'image droite.

Il serait facile de donner à ces deux images une grandeur égale ou inférieure à celle de l'objet.

19. Un petit cercle lumineux est placé dans un vase sphérique de verre rempli d'eau. Le plan de ce cercle est vertical, et la perpendiculaire à ce plan menée par son centre L passe par le centre C de la sphère. Quelle sera à peu près l'image de ce petit cercle pour un œil situé dans l'air sur le prolongement du diamètre horizontal CL?

On connaît le rayon h du petit cercle, le rayon r de la sphère, la distance CL ou d des deux centres, et l'indice l de réfraction de l'eau par rapport à l'air.

20. Déterminer le foyer principal F d'une sphère réfringente, connaissant la direction des rayons incidents, le diamètre $2r$ de la sphère et l'indice l de sa réfraction.

21. Trouver une relation entre le rayon r d'une sphère réfringente, l'indice l de sa réfraction et deux distances focales p et p' conjuguées entre elles relativement à cette sphère. p est la plus courte distance de la surface sphérique à un point lumineux L situé dans l'air, p' est la plus courte distance de cette surface à l'image L' du point L.

22. Des rayons lumineux émis par un point L situé dans l'air, après avoir traversé une sphère réfringente, repassent dans l'air. On demande une équation avec laquelle on puisse construire le lieu des points de rencontre des rayons émergents infiniment voisins. On donne le diamètre $2r$ de la sphère, l'indice l de sa réfraction et la longueur c d'une tangente menée du point L à la sphère.

23. Des rayons lumineux émis par un point L situé dans l'air, après avoir traversé une lentille biconvexe, repassent dans l'air. Trouver une équation à l'aide de laquelle on puisse construire approximativement le lieu des points de rencontre des rayons émergents infiniment voisins. On suppose la lentille très mince, et le point L placé sur le prolongement de son axe. r et r' sont les rayons de courbure des deux faces, l est l'indice de réfraction de la matière de la lentille.

24. Des rayons de lumière simple, qui se meuvent dans l'air parallèlement entre eux et qui forment un pinceau très délié, tombent sur une sphère



diaphane sous une incidence telle qu'après s'y être réfractés et y avoir subi une réflexion intérieure ils repassent dans l'air en conservant leur parallélisme. On mesure l'angle aigu 2δ que les rayons émergents font avec les rayons incidents. Comment déduirait-on de cette donnée l'indice l de réfraction de la matière de la sphère?

25. Des rayons blancs, parallèles à l'axe d'une lentille plan-convexe de verre, venant à tomber sur sa face plane, construire et calculer l'aberration longitudinale de sphéricité 1° pour les rayons violets émergents, 2° pour les rayons rouges.

Examiner le cas où la lentille est assez mince pour que tous les rayons incidents parallèles à l'axe puissent émerger.

On donne l'ouverture $2h$ de la lentille, le rayon de courbure r de la face sphérique, et les indices extrêmes de réfraction L et l du verre. Si le verre est du *crown-glass*, on a $L=1,547$ et $l=1,526$.

26. Dans une chambre obscure, des rayons solaires parallèles à l'axe d'un cône droit diaphane à base circulaire viennent frapper sa surface convexe. A une certaine distance derrière ce solide on place perpendiculairement à son axe un carton blanc. Quels sont les phénomènes de lumière que ce carton présentera? Qu'arriverait-il si le carton était placé successivement dans diverses directions obliques à l'axe du cône?

On peut supposer le cône équilatéral. On connaît

les indices extrêmes de réfraction L et l de la matière du cône (1).

27. Accoler trois prismes A, A′, A″, de petits angles, le premier de *crown-glass* et les deux autres de *flint-glass*, de manière que, le troisième A″ étant supprimé, les deux premiers A et A′ annulent la déviation moyenne des images des objets éloignés vus à travers leur ensemble sans en décolorer les contours, et que de plus le système des trois prismes décolore les images sans en détruire la déviation.

Les indices de réfraction du crown-glass et du flint-glass, l et l', λ et λ', L et L′, sont donnés pour les rayons rouge, moyen et violet. On connaît l'angle réfringent a du prisme A. Il s'agit de trouver les angles a' et a'' des prismes A′ et A″.

$$\text{On peut supposer}\begin{cases} l=1{,}52; \\ \lambda=1{,}53; \\ L=1{,}54; \end{cases} \quad \begin{cases} l'=1{,}63; \\ \lambda'=1{,}64; \\ L'=1{,}67. \end{cases}$$

28. Tracer sur un plan horizontal deux lignes telles que, si l'on plante des arbres suivant leurs longueurs, les opposés deux à deux d'une rangée à l'autre se montrent sous un angle constant v à un œil donné de position au dessus de ce plan. Les deux

(1) Les problèmes 3 et 26 d'optique, ainsi que les problèmes 22, 24 et 28 d'hydrostatique m'ont été communiqués par M. Thillaye, professeur de physique au collége de Louis-le-Grand.



rangées d'arbres qui satisferaient à cette condition offriraient, comme on sait, l'apparence de deux lignes parallèles, si le point de vue donné était à une assez grande distance de cette allée.

29. Si dans le télescope de Newton l'on ajoute à l'extrémité *objective* du tuyau une grande lentille biconvexe qui ait le même axe que le miroir concave et dont le foyer principal soit au delà de ce miroir, à quelle distance *p* du miroir l'image réelle d'un astre tendra-t-elle à se former? On suppose la longueur du tuyau sensiblement égale à cette distance *p*. On se donne le rayon de courbure *r* du miroir et la distance focale principale *f* de la lentille objective : on prend, par exemple, $r=24^{pi}$ et $f=20^{pi}$.

Si l'on connaissait de plus la distance focale principale φ de l'oculaire simple disposé latéralement et la distance *d* de la vision distincte, comment mesurerait-on le grossissement *g* produit par le télescope ainsi modifié? Quel serait le rapport de *g* au grossissement G qu'on obtiendrait en supprimant la nouvelle lentille? Quel serait aussi le rapport de *g* au grossissement G′ d'une lunette astronomique qui aurait le même objectif et le même oculaire?

30. Dans le télescope d'Herschel ne pourrait-on pas remplacer l'oculaire biconvexe par un oculaire biconcave disposé à peu près comme celui de la lunette de Galilée? Quelle serait l'influence de cette modification sur la position de l'image observée, sur le grossissement et sur le champ de la vision?

31. L'objectif d'une lorgnette étant une lentille biconvexe de *crown-glass* dont les deux rayons de courbure sont égaux entre eux et à r^{mm}, et l'oculaire étant une lentille biconcave de *crown-glass* dont les deux rayons de courbure sont égaux entre eux et à r'^{mm}, quelle est la relation qui doit exister entre r et r' pour que les images des objets très éloignés offrent des contours sensiblement incolores à un œil dont la distance de vision distincte est égale à d^{mm}?

Cette condition d'achromatisme étant remplie pour une vue donnée, quelle doit être la longueur x du tuyau de la lorgnette?

On connaît les indices de réfraction l et L du crown-glass pour les rayons rouge et violet. (l=1,526; L=1,547. On peut supposer d=270^{mm}.)

32. Trouver une courbe plane réfringente telle que, si tous ses points sont frappés par des rayons lumineux qui partent d'un point A donné sur son plan, le rayon réfléchi et le rayon réfracté qui répondent au même rayon incident forment entre eux un angle constant v. On connaît l'indice l de la réfraction que la courbe doit exercer.

(On sait que si l'angle v était droit, la courbe demandée polariserait la lumière émanée du point A).

33. Lorsqu'une lentille biconvexe d'une très légère courbure est posée sur un verre plan, on sait que les lames d'air d'épaisseur variable comprises entre les deux verres produisent des anneaux colorés. Pour mesurer l'épaisseur y de l'une de ces la-

mes, Newton s'est servi de la valeur approchée $y=\frac{x^2}{2r}$, x désignant le rayon de l'anneau correspondant à l'épaisseur y, et r le rayon de courbure de la face convexe qui touche le verre plan.

1° Quel est le degré d'approximation qu'on obtient en évaluant ainsi l'épaisseur y ?

2° Quelle devrait être la nature de la surface Z en contact avec le verre plan pour que les épaisseurs des lames d'air fussent exactement comme les carrés des diamètres des anneaux?

34. Soient deux prismes de petits angles, l'un de spath d'Islande, l'autre de cristal de roche, dont les arêtes soient parallèles à l'axe de double réfraction. Un rayon de lumière simple tombant sur ces prismes dans un plan perpendiculaire aux arêtes, quel devrait-être le rapport approché des angles réfringents a et a' pour que l'écart des deux rayons émergents ordinaire et extraordinaire dû au premier prisme fût égal à m fois l'écart correspondant produit par le second?

35. On sait que la lunette micrométrique de Rochon contient un double prisme bi-réfringent de cristal de roche. Pourrait-on remplacer ici le cristal de roche par le spath d'Islande? Quelle serait l'influence de cette modification sur la marche des rayons extraordinaires? Ces rayons pourraient-ils toujours émerger, quel que fût l'angle du prisme?

SUITE DE LA SECONDE PARTIE.

COMPLÉMENT DU CHAPITRE Ier.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES DE STATIQUE.

1. On disposera la balance convenablement sur la platine de la machine pneumatique. On commencera par charger les bassins A et B de *poids marqués* (en laiton) peu différents du poids cherché, en ayant soin de mettre sur le bassin A un petit excès de poids π tel qu'un centigramme. Après avoir recouvert la balance avec le récipient, on fera le vide ; puis, à l'aide de l'arc de cercle divisé que porte le pied de l'instrument, on observera l'angle α que l'aiguille forme avec la verticale quand le fléau est en équilibre.

On laissera ensuite rentrer l'air, on enlèvera le récipient et les poids, et si le corps M est moins dense que le laiton, on placera M sur le bassin A, on lui fera équilibre dans l'air par des poids marqués p qu'on placera sur B, et l'on fera le vide autour de la balance. Alors le fléau penchera du côté de A, et l'on notera l'angle β de l'aiguille avec la ver-

ticale. Soit y le poids inconnu de M et soit π' l'excès de y sur p, l'on aura

$$\pi' : \pi :: \text{tang}\beta : \text{tang}\alpha,$$

d'où l'on déduira

$$y = p + \pi \frac{\text{tang}\beta}{\text{tang}\alpha}.$$

Pour vérifier cette valeur, on peut recommencer la pesée dans le vide, en plaçant d'avance sur le bassin B les poids marqués $p + \pi \frac{\text{tang}\beta}{\text{tang}\alpha}$, et si l'on ne s'est trompé ni dans les observations ni dans les calculs, *le fléau devra être exactement horizontal dans le vide.*

Si la balance n'était pas juste, on répéterait les opérations précédentes en mettant successivement l'excès de poids π et le corps M sur le bassin B, et l'on trouverait

$$y' = p' + \pi \frac{\text{tang}\beta'}{\text{tang}\alpha'}.$$

Pour obtenir le véritable poids M, il faudrait prendre, comme on sait, une moyenne proportionnelle entre y et y'.

Enfin si le corps M était plus dense que le laiton, on placerait M sur le bassin qui dans la pesée préliminaire a supporté la plus petite charge de poids marqués, et notre méthode ainsi modifiée donnerait

$$y = p - \pi \frac{\text{tang}\beta}{\text{tang}\alpha}.$$

2. Il s'agit ici d'une balance qui paraît juste, c'est-à-dire dont le fléau se maintient horizontalement quand chaque bras supporte *son* bassin; en sorte que la fausseté de l'instrument vient de l'inégalité des bras du fléau. Soient l et l' les longueurs de ces bras, on trouve

$$x+y=\frac{l^2+l'^2}{ll'}p,$$

quantité qui est plus grande que $2p$ tant que l est différent de l'. Il suit de là que, si ce mode de pesée était appliqué à des marchandises, il serait avantageux à l'acheteur.

3. Il est évident que le point G est sur la hauteur du segment. La tangente de 9° 27′ 44″,36 est $\frac{1}{6}$ du du rayon tabulaire : on en déduit aisément que le point G est au tiers de la hauteur à partir de la base.

On trouverait de même que le point G′ est aux $\frac{3}{8}$ de la hauteur de l'hémisphère à partir de la base.

4. Le point G est évidemment sur l'axe commun des deux segments. Si l'on suppose ce point G situé entre le centre C et le sommet du segment dont la densité est d, on obtient par le calcul

$$x=\frac{3}{4}\,\frac{e^2(2r-e)^2(d-d')}{e^2(3r-e)d+(2r-e)^2(r+e)d'},$$

quantité positive, nulle ou négative, suivant qu'on a $d>d'$, $d=d'$, ou $d<d'$. Ainsi le centre de gravité G est placé entre le centre de figure C et le sommet du segment le plus dense; G ne coïnciderait avec C que si l'on avait $d=d'$, c'est-à-dire que si la sphère était homogène. Ces conséquences de la formule peuvent être vérifiées par des raisonnements très simples.

Actuellement, pour déterminer le même point G par l'expérience, on suspendra la sphère à un fil mince par un point quelconque du contour de la base commune aux deux segments, et, quand l'équilibre aura lieu, on observera l'angle α que le plan de cette base fait avec la verticale. On aura pour la distance x ou CG

$$x=r-e+\sqrt{e(2r-e)}\ \text{tang}\alpha.$$

Cette expression convient au cas où le point G est dans l'intérieur du segment le plus dense. Si G était hors de ce segment, il faudrait changer le signe de tangα.

En égalant entre elles les deux valeurs trouvées pour x, on en déduirait le rapport de d à d'.

3. Le point G est sur l'axe de figure. Si l'on suppose ce point situé au dessous du centre C de la base de l'hémisphère, et si l'on désigne par x la distance CG, on trouvera

$$x=\frac{3}{4}\,\frac{r^2d-2h^2d'}{2rd+3hd'}.$$

La condition demandée est $x>0$, d'où l'on tire $h<r\sqrt{\frac{d}{2d'}}$, et d'après les données $h<4{,}8627\,r$. Pour satisfaire à cette condition, il suffit de raccourcir convenablement le cylindre de liége.

6. Soit z la distance BM, on obtient

$$z=\frac{cq\cos\alpha}{\sqrt{p^2-q^2\cos^2\alpha}},$$

Voyez l'*Arithmétique universelle* de Newton, traduite par Beaudeux, t. I, p. 207. Newton a résolu aussi la question plus générale où chacun des deux poids est obligé de descendre par une ligne oblique.

Si $p=q$, il vient $z=\frac{c}{\tang\alpha}$, et la droite BM doit former avec le fil MF le même angle α qu'avec la verticale. Dans ce cas on déduit aisément des propriétés focales de la parabole que la droite BM est tangente au point M à une parabole qui a pour foyer le point F, dont l'axe est vertical, et dont le sommet est le pied de la perpendiculaire menée du point B sur la verticale FA. Il suit de là que l'équilibre aurait encore lieu entre les poids égaux p et q, si le poids q ne pouvait se mouvoir que le long d'une parabole qui aurait son foyer en F, dont l'axe serait vertical, et dont le paramètre serait arbitraire. En quelque point de la courbe que se trouvât le poids q, il ferait équilibre, à l'aide du fil AFM, au poids p agissant suivant la verticale FA.

7. Voyez l'*Arithmétique universelle* de Newton, traduite par Beaudeux, t. I, p. 210. Voyez aussi dans l'*Encyclopédie méthodique* les *Amusements des sciences*.

8. On prolongera les lignes AC et BD jusqu'à ce qu'elles rencontrent les verticales Dq et Cp. Soient E et F les points d'intersection ; on trouvera

$$p : q :: \mathrm{DE} : \mathrm{CF}.$$

On peut arriver directement à cette solution, ou bien encore la déduire de celle du problème précédent, comme Newton l'a fait dans son *Arithmétique universelle*, t. I, p. 212. On voit, ajoute Newton, qu'il est facile de composer, avec des fils seulement, une espèce de balance telle qu'au moyen d'un poids donné q on obtienne le poids p d'un autre corps quelconque.

9. La condition demandée est

$$\frac{(r\cos\theta - a)^2}{(l'+l)^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{(l'-l)^2} = 1 \ldots\ldots (\mathrm{B}).$$

Si l'on connaît les longueurs a, l, l', ainsi que la position du point F, et qu'on veuille trouver le point F', on peut regarder r et θ comme les coordonnées polaires de ce dernier point. Le problème est indéterminé, et l'on conclut de l'équation (B) que le lieu des points cherchés F' est une ellipse dont le plan

est vertical, dont les axes sont $2(l'+l)$ et $2(l'-l)$, dont le grand axe est dirigé suivant l'horizontale FH, et dont le centre C est à une distance a du point F (1). L'équation (B) est facile à discuter. La distance des parallèles AA′ et FH est égale à $\frac{l r \sin\theta}{l'-l}$. Pour chaque position du point F′ il est aisé d'assigner la position correspondante de la tige AA′.

10. On trouve $x = \frac{b}{2}\sqrt{3} - \frac{b}{2}$, expression que l'on peut construire en décrivant le cercle dont le diamètre est b, et en retranchant le rayon du côté du triangle équilatéral inscrit. On remarquera que la valeur de x est indépendante de la hauteur du rectangle.

11. Il faut d'abord que l'intersection des deux plans soit horizontale, et que les centres C et C′ soient dans un plan BAB′ perpendiculaire à cette intersection. En second lieu, si dans ce plan BAB′ on mène des parallèles aux *longueurs* AB, AB′, des deux plans, à des distances r et r' de ces longueurs, les points C et C′ doivent être situés respectivement sur

(1) Cette conclusion paraîtra peut-être encore plus évidente si l'on pose d'abord $r\cos\theta = x$ et $r\sin\theta = y$, c'est-à-dire si l'on transforme les coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires, ce qui donne

$$\frac{(x-a)^2}{(l'+l)^2} + \frac{y^2}{(l'-l)^2} = 1;$$

ces deux parallèles. On sait enfin que $CC' = r + r'$. Ainsi pour ramener la question à un problème très simple de géométrie il suffit de connaître l'angle que la ligne CC' fait avec AB ou AB' dans l'état d'équilibre. Soit x l'angle de CC' avec AB, on trouvera

$$\tang x = \frac{p' \sin\theta' - p \sin\theta \cos(\theta + \theta')}{p \sin\theta \sin(\theta + \theta')}.$$

Si les deux sphères étaient de même nature, on pourrait remplacer $\frac{p}{p'}$ par $\frac{r^3}{r'^3}$.

Si les deux plans inclinés étaient perpendiculaires entre eux, il viendrait

$$\tang x = \frac{p'}{p} \cot\theta.$$

Voyez d'ailleurs dans l'*Encyclopédie méthodique* les *Amusements des sciences*, p. 676. On y traite spécialement le cas où l'angle des deux plans est droit.

12. Il faut évidemment que la tige AB (qu'on suppose réduite à son axe) soit dans le plan d'un grand cercle vertical. Cette condition étant remplie, l'équation d'équilibre est

$$x^2(2x^2 - r^2) = r^2(l - x)^2 \quad \ldots \quad (E),$$

ou

$$x^4 - r^2x^2 + r^2lx - \frac{r^2l^2}{2} = 0.$$

Soit $l=\frac{40}{49}r$; on trouve, après les transformations connues, $x=\frac{5}{7}r$. Quant aux trois autres racines de l'équation, l'une est égale à $-1,33975\,r$, et les deux autres sont imaginaires. $\frac{5}{7}r$ est donc la seule valeur de x qui résolve le problème. On en déduit $v=45°\ 35'\ 4'',9$.

Il résulte de l'équation (E) qu'on doit toujours avoir $2x>r\sqrt{2}$, c'est-à-dire que la partie intérieure de la tige doit être plus grande que le côté du carré inscrit. En effet il est aisé de constater directement que dans le cas contraire l'équilibre ne pourrait avoir lieu. Il suit de là que v doit être plus grand que 45°.

Nous engageons le lecteur à discuter l'équation (E). Voici les cas les plus intéressants : 1° $2l=r\sqrt{2}$, 2° $2l<r\sqrt{2}$, 3° $l=2r$, 4° $l>2r$.

13. On trouve $R=\frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}$.

Il est évident qu'il faut encore pour l'équilibre que les forces R et P tendent à faire tourner le cylindre en sens contraire.

Si l'on avait $\varepsilon=0$, auquel cas l'ellipse deviendrait un cercle, il en résulterait R=P, ce qu'il est facile de prouver directement.

14. Soit x la distance inconnue BM ; on obtient par des considérations d'algèbre élémentaire $x=\frac{a^2+c^2}{c}$.

Pour construire cette valeur il suffit de joindre H et B, et de mener par le point H une perpendiculaire à la droite BH. Le point M où cette perpendiculaire rencontre AB est le point demandé. $\frac{a}{c}\sqrt{a^2+c^2}$ est la longueur que doit avoir la corde MH. L'effort *minimum* z égale $\frac{cp}{\sqrt{a^2+c^2}}$; on a donc $z : p :: CB : BH$.

15. Soit a la distance AC des deux droites; soit $CM=x$; on trouve $x=\frac{a}{\sqrt{m}}$. Si l'on prend pour unité de force l'attraction à l'unité de distance, le *maximum* de l'attraction décomposée suivant AB est égal à

$$\frac{m^{\frac{m}{2}}}{a^m(m+1)^{\frac{m+1}{2}}}$$

Si l'on fait $m=2$, ce problème devient applicable à la théorie de l'aimantation. Voyez le *Traité de physique* d'Haüy, 3ᵉ édit., t. II, p. 89.

On peut déterminer le point M et le maximum correspondant, soit par le calcul différentiel, soit par la considération du contact des courbes. Voyez dans le tome XXIIᵉ des *Annales de mathématiques* publiées par M. Gergonne un *Mémoire* où j'ai donné des *développements nouveaux sur les procédés élémentaires qui peuvent servir à déterminer les valeurs maximums et minimums des fonctions algébriques*.

COMPLÉMENT DU CHAPITRE II.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE.

1. Soit g la vitesse acquise par un corps grave après la première seconde de sa chute (à Paris $g=9^{m},8088=30^{pi},196$), il vient

$$x=\frac{m}{g}(m+ng\pm\sqrt{m(m+2ng)});$$

la valeur de x qui répond au signe inférieur du radical est celle qui convient à la question, car l'autre valeur est plus grande que mn.....

Ce problème est tiré de l'*Arithmétique universelle* de Newton : voyez cet ouvrage traduit par Beaudeux, t. I, p. 213.

2. Soit x la distance du point α au point où A se trouve à l'instant où la chute de A' commence; soit x' la distance du point α' à la position initiale de A';

$$x=m-h-d+\frac{(m-h-d)^2}{4h},\quad x'=\frac{(m-h-d)^2}{4h}.$$

D'après les données numériques

$$x = 225^{pi}, \quad x' = 135^{pi}.$$

Pour déterminer le point de rencontre de A et de A', il suffirait de poser $d=0$. Voyez d'ailleurs l'*Arithmétique universelle* de Newton traduite par Beaudeux, t. I, p. 220.

3. La droite demandée est la bissectrice de l'angle que la verticale forme avec la perpendiculaire abaissée de A sur BC.

Remarque. Le temps *t* employé par le mobile à décrire cette ligne est plus court que le temps qu'il mettrait à parcourir toute autre *droite* menée du point A à BC; mais ce temps *t* n'est pas un minimum *absolu :* on sait que c'est la cycloïde qui est la courbe de plus prompte descente.

4. On place d'abord le double cône de manière que son centre G de gravité ou de figure soit sur la verticale qui passe par le sommet A de l'angle des deux règles. Ainsi dans sa position primitive le point G est à une hauteur *r* au dessus d'une horizontale menée par A.

Soit M un point de la bissectrice de 2φ, tel qu'une perpendiculaire égale à $2a$ qui lui serait menée par M formerait un triangle avec les deux règles (ce triangle serait isoscèle et aurait $2a$ pour base); le point M sera la position finale de G dans le mouvement observé. Ce point M est élevé de $\frac{a\sin\theta}{\tang\varphi}$ au dessus

de l'horizontale imaginée par A. Le centre G, arrivé en M, est donc descendu réellement de la quantité $r-\frac{a\sin\theta}{\tang\varphi}$, ce qui exige que l'on ait $\tang\varphi>\frac{a\sin\theta}{r}$.

Il est aisé de reconnaître qu'entre ses deux positions extrêmes le centre G décrit une ligne droite.

5. La longueur $l=\sqrt{\frac{h}{2g}}(n+\sqrt{n^2+2gh})$; $\sqrt{n^2+2gh}$ est la vitesse finale v du corps qui a parcouru la longueur l; $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ est la durée commune t de la chute des deux corps.

Dans l'exemple proposé $l=480^{pi}$, ce qui donne un tiers d'angle droit (30°) pour l'inclinaison du plan. $v=150^{pi}$, $t=4''$.

6. La relation cherchée est

$$2l^2l'^2v'^2-2ll'(l^2+l'^2)vv'+2l^2l'^2v^2+gh(l^2-l'^2)^2=0.$$

Si l'on connaît v, on tirera v' de cette équation, dont les racines sont réelles tant qu'on a $v^2>2gh$. Ces racines sont toutes deux positives, et il est facile d'expliquer pourquoi l'algèbre conduit à deux valeurs de v'. En effet si les longueurs des deux plans étaient indéfinies et que les deux corps ne fussent arrêtés par aucun obstacle, ils monteraient jusqu'à ce que la pesanteur *relative* eût épuisé par degrés leurs vitesses initiales, et redescendraient ensuite suivant les mêmes longueurs. M et M' pourraient donc se rencontrer au point A, soit dans leur ascension, soit

dans leur descente. Par exemple, en partant des nombres donnés, on obtient $v' = \frac{625 \pm 105}{4}$, d'où $\begin{cases} v'_+ = 182^{pi},5 \\ v'_- = 130^{pi}. \end{cases}$ On trouve aussi que le corps M parvient en A au bout de $\frac{10''}{3}$ et passe de nouveau par A après $\frac{40''}{3}$. Or, avec la vitesse de 130^{pi}, M' emploiera $\frac{10''}{3}$ pour atteindre le point A en montant; et, avec la vitesse de $182^{pi},5$, il faudra $\frac{40''}{3}$ à M' pour arriver au point A en redescendant. Donc la *rencontre ascendante* au point A correspond aux vitesses initiales de 150^{pi} et de 130^{pi}, et la *rencontre descendante* a lieu au même point A dans le cas des vitesses de 150^{pi} et de $182^{pi},5$.

10. Si t désigne des secondes, et si g est la vitesse acquise par un corps grave au bout d'une seconde, on aura

$$t = \frac{2\pi}{\text{tang}\omega}\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

La vitesse v de rotation de la balle est $\sqrt{gh}$. Si l'on veut traduire en langage ordinaire ces valeurs de t et de v, on les écrira comme il suit :

$$t : \pi\sqrt{\frac{h}{g}} :: 2 : \text{tang}\omega, \qquad v = \sqrt{2g\frac{h}{2}}.$$

11. Dans ce problème, ainsi que dans le précé-

dent, on pose la petite boule au point M sans lui imprimer de vitesse initiale. En rapportant g et t aux mêmes unités que dans le numéro précédent, on trouve

$$x=\frac{a^2gt^2}{4\pi^2b^2}.$$

La vitesse v de rotation de la boule est $\sqrt{\frac{g(a^2-x^2)}{x}}$.

En prenant pour unité de masse la masse de la boule, on aura

$$p=\frac{g}{bx}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}.$$

Pour obtenir v et p en fonction de t, il suffit de remplacer x par sa valeur dans les deux dernières expressions.

Ces résultats se simplifieraient si l'on avait $a=b$, c'est-à-dire si le vase était sphérique.

12. 1° $x=12^m,57$; 2° $y=2^m,549$; 3° $z=2^m,2355$; 4° $\delta=1,24$; 5° et 6°, il serait facile de calculer u et v. Ces nombres étant très considérables, nous ne croyons pas devoir les rapporter ici. Au delà de certaines limites de grandeur ou de petitesse, les nombres n'offrent plus d'intérêt, parce que l'esprit cesse alors de concevoir nettement les rapports qu'ils expriment.

13. En remplaçant $\frac{1}{289}$ par α, on obtient

$$g' = g\sqrt{1 - 2\alpha\cos^2 l + \alpha^2\cos^2 l},$$

$$\sin e = \frac{\alpha \sin l \cos l}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos^2 l + \alpha^2\cos^2 l}}.$$

A Paris la diminution $g - g'$ de la pesanteur est $\frac{1}{667,6}$ de la pesanteur réelle g, et la déviation e du fil à plomb est de 5′ 54″,6, ou d'environ 0°, 1.

On peut simplifier les valeurs de g' et de $\sin e$, si l'on substitue $\alpha^2\cos^4 l$ à $\alpha^2\cos^2 l$, approximation qui est permise, parce que α^2 est une fraction très petite (1). Il vient alors

$$g' = g(1 - \alpha\cos^2 l), \qquad \sin e = \frac{\alpha \sin l \cos l}{1 - \alpha\cos^2 l}.$$

On discutera sans peine ces deux expressions en y faisant varier l.

On aurait ainsi pour Paris $\frac{g-g'}{g} = \frac{1}{667}$, valeur qui diffère à peine de la valeur exacte. Quant à l'angle e, il ne serait pas altéré sensiblement.

Dans cette question nous avons négligé l'aplatissement de la terre vers ses pôles. On n'ignore pas qu'en vertu de cette forme la pesanteur réelle augmente en même temps que la latitude.

(1) Huyghens, dans son *Discours sur la cause de la pesanteur* imprimé à Leyde en 1690, arrive directement à cette valeur approchée de g' par une construction géométrique, sans recourir à la résolution d'un triangle.

14. $x=\frac{1}{280,5}$ environ. Ce rapport n'est pas beaucoup plus grand que celui qu'on a trouvé à la surface même de la terre. La force centrifuge ne ferait équilibre à la pesanteur dans le plan de l'équateur terrestre qu'à une distance du centre égale à 6,6115 fois le rayon. Voyez la *Mécanique* de M. Poisson, seconde édition, t. II, n. 620.

15. Soit δ l'expression générale de la distance entre les deux mobiles au bout d'un temps t; on obtient

$$\delta^2=[a^2+a'^2+2aa'\cos(\theta+\theta')]\,t^2-2c(a\cos\theta+a'\cos\theta')t+c^2.$$

Par des considérations d'algèbre élémentaire on trouve que δ est un *minimum* lorsqu'on a

$$t=\frac{c(a\cos\theta+a'\cos\theta')}{a^2+a'^2+2aa'\cos(\theta+\theta')},$$

et la valeur correspondante de δ, ou d, est égale à

$$\pm\frac{c(a\sin\theta-a'\sin\theta')}{\sqrt{a^2+a'^2+2aa'\cos(\theta+\theta')}}.$$

Pour que les points M et M' se rencontrent, il faut qu'on ait $d=0$, et par conséquent

$$a\sin\theta=a'\sin\theta',$$

c'est-à-dire que les composantes verticales des vi-

tesses d'impulsion doivent être égales entre elles. Il vient alors pour le temps t

$$t = \frac{e}{a\cos\theta + a'\cos\theta'}.$$

Quant à la position du point C, nous la laissons à chercher.

Lorsque la condition de rencontre est remplie, on en déduit sans peine que les deux mobiles sont à chaque instant sur une même droite horizontale. Donc les sommets S et S' de leurs trajectoires paraboliques sont à la même hauteur, et les deux mobiles atteignent ces sommets en même temps, si toutefois leur choc ne s'opère qu'après leurs passages respectifs par les points S et S'.

16. La solution se déduira du *théorème de Toricelli*. Rien de plus simple que la construction géométrique des coordonnées horizontale et verticale du point demandé.

17. Ce problème a été imaginé par Huyghens. La formule qu'on obtiendra est susceptible de discussion.

18. Pour les lois du choc, soit normal, soit oblique, des sphères élastiques, voyez la *Mécanique* de M. Francœur, nos 225..228 (5e édit.).

COMPLÉMENT DU CHAPITRE III.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES D'HYDROSTATIQUE.

1. Supposons qu'on ait marqué le niveau de l'eau dans le vase avant l'immersion du solide; pour rétablir l'équilibre après l'immersion, on retirera de l'eau du vase à l'aide d'une pipette, et l'on reconnaîtra, quand l'équilibre sera rétabli, que le niveau est redevenu le même qu'avant l'immersion. Donc.....

2. $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\frac{c-b}{a-c}=3,4726.$

3. Soit x le poids réel de la cire; soit y le poids réel du platine; $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}\frac{a-c}{b-c}=1,001297.$

4. $z=\frac{bc-ad}{a(c-d)}=0,168081.$

Si l'on faisait $d=0$, c'est-à-dire si l'on négligeait la perte de poids due à l'air déplacé, il viendrait $z=\frac{b}{a}=0,169163$, valeur un peu plus forte que la précédente; ce qu'on pouvait prévoir.

5. $\frac{x}{y}=\frac{a-b}{b-c}=0,85294.$

6. $x=\frac{p}{p+p'}=0,24.$

7. $x=\frac{p}{p+p'-p''}=0,24.$

8. $x=\frac{pd}{p''-p'}.$

10. $x=\frac{15(1+\alpha)}{15-(n-15)\alpha}.$

Si l'on résout cette équation par rapport à n, on reconnaît que n a pour limite supérieure un nombre fini, ce qu'il est facile d'expliquer.

Pour l'acide sulfurique concentré l'expérience donne $n=67$; d'où l'on conclut $x=1,837$.

11. $y=\frac{10(1+\beta)}{10+n\beta}.$

Pour l'éther sulfurique pur on observe que $n=60$; d'où l'on déduit $y=0,7175$.

12. $x=\frac{mH(p'-p)+h(p''-p')}{h'(p''-p)}.$

Dans l'exemple proposé $x=1+\frac{(m-1)(p'-p)}{p''-p}=2,422.$

14. 1° En négligeant l'épaisseur de la base supé-

rieure du tube, et en appelant p la hauteur de la colonne d'eau qui fait équilibre à la pression de l'atmosphère, on trouve

$$x=-\frac{p+h}{2}+\sqrt{\left(\frac{p+h}{2}\right)^2+n(p+n)}.$$

2° Si p'' représente une colonne d'eau, il faut, pour que le ludion remonte, que l'on ait $p''>h$, ce qui est indiqué par le raisonnement et par le calcul.

15. Il est facile de prévoir toutes les particularités de cette expérience. Nous avertirons seulement qu'on doit tenir compte de la petite quantité d'air qui reste dans le siphon après qu'on a fait le vide, et qu'il faut dire ce qu'elle devient lors de la rentrée de l'air atmosphérique.

16. Comme il est aisé de résoudre cette question, nous indiquerons seulement le moyen de répéter l'expérience qui en est le sujet :

Le siphon qui nous sert à cet usage est un tube de verre un peu large dont les branches verticales sont très rapprochées l'une de l'autre. Ce siphon étant plein d'air, nous fermons avec le doigt l'extrémité O, puis nous plongeons dans une grande éprouvette pleine d'eau la branche ascendante, dont le sommet ne doit pas être beaucoup au dessus du niveau de l'eau dans le vase. Lorsque ensuite nous débouchons l'ouverture O, le liquide, qui s'élevait moins dans le tube que dans l'éprouvette, s'élance

dans ce tube en refoulant l'air comprimé, atteint le niveau ambiant, le dépasse en vertu de sa vitesse acquise, et se porte dans l'autre branche, d'où il chasse l'air en partie. C'est ainsi que le siphon est imparfaitement amorcé.

Il peut arriver néanmoins que tout l'air soit expulsé avec sifflement, et que le jeu ordinaire du siphon se produise. Dans ce cas nous recommençons l'expérience en plongeant un peu moins avant dans l'eau la branche intérieure du siphon, et dès lors la vitesse d'ascension du liquide ne suffit plus pour chasser complétement l'air de la branche extérieure.

17. Ce problème, dont nous laissons la solution à chercher, a été proposé, il y a cinq ans, aux candidats à l'Ecole normale.

18. $x=-\frac{p-h-d}{2}+\sqrt{\left(\frac{p-h-d}{2}\right)^2+pr}.$

Dans le premier exemple $x=2^{pi}$. Pour que le vase se vide complétement il faut qu'on ait

$$d \geqq \frac{p(h-r)}{h},$$

condition à laquelle on pourra toujours satisfaire en allongeant la branche descendante du siphon avec des tuyaux additionnels. Dans le second exemple cette condition est remplie, et il vient $x=h$.

On n'éprouverait aucune difficulté à mettre ce problème en équation si l'on voulait tenir compte de

l'élasticité f de la vapeur aqueuse mélangée avec l'air du vase. On devrait connaître la température t de l'expérience. On supposerait l'air du cylindre constamment saturé de vapeur à t^o. Si l'on conservait le *pied* pour unité de longueur, il faudrait avoir soin de traduire en pieds d'eau l'élasticité f qui est exprimée dans la *table* de M. Biot en millimètres de mercure.

21. Soit $h+l=m$, on trouve

$$x=(n-r)\left(\frac{3}{2}+\frac{m+n}{p+r}\right).$$

Si l'air contenu dans les branches A et B supportait la pression p avant que la branche A ne fût plongée dans la cuve, le liquide aurait eu, avant cette immersion, le même niveau dans les deux branches extérieures B et C, et l'on observerait ensuite que la différence r de niveau redeviendrait nulle au moment où le niveau de l'eau dans la cuve répondrait à l'extrémité inférieure de la branche plongée. Désignons par $h+a$ la longueur totale de cette branche; pour $x=a$, nous aurions $r=0$; d'où il résulterait

$$a=n\left(\frac{3}{2}+\frac{m+n}{p}\right).$$

Connaissant m et a, ainsi que p, l'on déterminerait n à l'aide de cette équation, qui est du second degré par rapport à n. Il serait facile d'obtenir cette équation directement (n° 21 de la *première partie*).

23. $p=\frac{mh'-h}{m-1}=755^{mm}$.

24. $x=\frac{2h+p'-p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2h-p'-p)^2+8np'}$.

Ces deux valeurs sont toujours réelles; x_+, c'est-à-dire la valeur de x qui répond au signe supérieur du radical, ne peut satisfaire à la question, car on a

$$x_+>\frac{2h+p'-p}{2}+\frac{2h-p'-p}{2},$$

ou

$$x_+>2h-p,$$

et comme p est $<h$, il en résulterait $x_+>h$, ce qui serait impossible. C'est donc x_- qu'il faut prendre.

Dans le premier exemple $x_+=44^{po}$ et $x_-=21^{po}$.

Dans le deuxième exemple $x_+=67^{po}$ et $x_-=-7^{po}$. La valeur négative est celle qui résout le problème: elle indique une élévation de niveau plus petite dan s la branche fermée que dans la branche ouverte.

Une question semblable sur le baromètre à cuvette se trouve dans les *Traités de physique* de M. Biot et d'Haüy. Nous croyons devoir avertir qu'Haüy s'est trompé dans l'interprétation de la valeur étrangère au problème. Voyez le *Traité* d'Haüy, 3e édit., t. I, *note* du n° 434. C'est la lecture de cette *note* qui nous a suggéré la question suivante.

25. $x=\frac{h\pm\sqrt{h^2-4np}}{2}$.

Ces deux valeurs sont positives. La plus petite (x_-) est la seule que donne l'expérience, quoique *théoriquement* la plus grande (x_+) satisfasse aussi à la question. En effet l'air du tube, se dilatant à mesure qu'on raréfie l'air du récipient, acquiert le volume x_- avant le volume x_+. Or, quand il atteint ce volume x_-, le vide est parfait, et l'équilibre de l'air intérieur ne peut plus être troublé, puisque le mercure ne peut plus se déverser. Donc x_- est le volume que l'air conserve, et l'équilibre correspondant au volume x_+ ne saurait se réaliser.

Dans l'exemple proposé $x_+ = 14^{po}$, et $x_- = 1^{po}$.

Comme on n'obtient pas un vide parfait avec la machine pneumatique, il faut supposer la hauteur h du tube augmentée de la colonne mercurielle qui mesure l'élasticité finale de l'air du récipient.

26. En négligeant les petites variations de niveau qui ont lieu dans la cuve, on trouve $x=23$, et $y=32{,}5$. (Ce double problème est l'inverse du problème 11 de la *première partie*.)

27. $$x=\frac{p+h+a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p-h-a)^2+4ph}.$$

Ces deux valeurs, x_+ et x_-, sont réelles et positives. Celle qui répond au signe supérieur du radical est étrangère à la question; car, si l'on a $p>h+a$, il vient

$$x_+>\frac{p+h+a}{2}+\frac{p-h-a}{2},$$

ou $x_+ > p$, ce qui est impossible; et si l'on a $p < h + a$, il en résulte

$$x_+ > \frac{p+h+a}{2} + \frac{h+a-p}{2},$$

ou $x_+ > h + a$, ce qui est pareillement impossible. x_- est donc la seule valeur convenable.

Dans l'exemple proposé $x_+ = 96^{cm}$, $x_- = 19^{cm}$.

Si l'on changeait a en $-a$, c'est-à-dire si le tube était *enfoncé* dans le mercure de la quantité a, x_+ devrait encore être rejeté, x_- serait encore la valeur cherchée et deviendrait négatif. Ce changement de signe indiquerait que le mercure, au lieu de s'élever dans le tube, s'y abaisserait au dessous du niveau environnant.

Supposons maintenant qu'on veuille tenir compte de la variation du niveau dans la cuve. Imaginons que cette cuve soit cylindrique ou prismatique. Soit m le rayon du cercle *égal* ou *équivalent* à *toute* la surface libre du liquide de la cuve, c'est-à-dire à la surface totale qu'il aurait si l'on retirait le tube. Soit r le rayon extérieur du tube, et soit r' son rayon intérieur. Enfin désignons par x l'élévation du mercure dans le tube au dessus de son niveau primitif. x est donné par l'équation

$$\frac{p(a-x)}{h+a-x} = \frac{m^2x + (r^2 - r'^2)(a-x)}{m^2 - r^2}.$$

On retomberait sur la valeur précédente de x en faisant dans cette équation $m = \infty$.

28. $x = n + \frac{n(n+1)pc}{a(b+c)}$.

La valeur de x s'approche de n à mesure que la fraction $\frac{c}{b}$ diminue.

29. $h = \frac{mp+2n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(mp-2n)^2+8np}$.

Ces deux valeurs sont toujours réelles; elles sont toutes deux positives tant qu'on a $m>1$, condition renfermée évidemment dans l'énoncé. Mais la valeur de h qui répond au signe supérieur du radical, étant plus grande que mp, est étrangère à la question. La plus petite valeur de h est donc celle qu'il faut prendre.

Dans notre exemple $h_+ = 232^{po}$, et $h_- = 7^{po}$.

30. $x = \frac{a^{n+1}p}{(a+a')(a+b)^n} + \frac{(a'+n'b')p}{a+a'}$.

La condition nécessaire pour qu'on ait $x=p$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{n'b'}{a} = 1 - \frac{a^n}{(a+b)^n};$$

ce qui signifie que la quantité d'air introduite en a' après n' coups de piston doit être égale à la quantité d'air extraite de a après n coups, condition qu'il était facile de prévoir.

32. $x = \frac{np}{mv+n}$.

On pourrait vérifier cette solution par des pesées.

x aurait la même valeur si B, au lieu d'être vide, était rempli d'air ou d'un gaz quelconque autre que le gaz dissous. Seulement l'équilibre s'établirait au bout d'un temps plus long. Si l'on supposait $\frac{n}{v}=\infty$, il viendrait $x=p$, c'est-à-dire que tout le gaz se dégagerait de l'eau et se dissiperait dans le récipient illimité B. C'est ce qui arriverait si l'on débouchait le ballon A dans l'atmosphère.

Le rapport m dépend de la nature du gaz que l'eau dissout. Pour le gaz acide sulfureux $m=37$, et pour le gaz carbonique $m=1$. (Voyez dans le t. 1[er] des *Annales de chimie et de physique* une *Lettre* de J. Dalton *sur les lois de l'absorption des gaz par les liquides*.)

34. On trouve approximativement $\sin\theta=\frac{ah}{a^2-b^2}$. Voyez le *Traité de physique* d'Haüy, 3[e] édit., t. I, n° 366. Voyez aussi le *premier supplément au* 10[e] *livre de la mécanique céleste*, n° 9, p. 32.

35. Avec les mêmes approximations qu'au numéro précédent on trouve

$$x=\frac{2abh}{a^2-b^2}.$$

36. $x=ih-q\left(1+\frac{l}{a}\right)$,

valeur plus petite que h si l'on a

$$h<\frac{q\left(1+\frac{l}{a}\right)}{i-1};$$

cette inégalité est donc la condition demandée.

Il faudrait dans la valeur de x changer q en $-q$, si le liquide *mouillait* le solide, auquel cas ce liquide *s'élèverait* autour du prisme au dessus du niveau environnant.

Ce problème est extrait du *deuxième supplément au* 10e *livre de la mécanique céleste*, p. 35.

COMPLÉMENT DU CHAPITRE IV.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES SUR LA CHALEUR.

1. $\alpha = \frac{1}{448}$.

2. $x = p^{g} + \frac{4}{3}\pi r^{3}(1 + kt)\, 1^{g},3\, \frac{h}{76}\, \frac{800}{800 + 3t}$.

3. La dilatation cherchée est 0,05358.

4. $t = 243°$.

5. On a rigoureusement $\delta = d + k + dk$. L'erreur consiste donc à négliger le produit des coefficients d et k.

6. Approximativement

$$t = \frac{h(1 + a\mathrm{T}) - \mathrm{H}}{a\mathrm{H}}. \quad \left(\text{Ici } a = 0,00375 = \frac{3}{800}\right).$$

7. $\frac{x}{v} = \frac{dm'(1 + a't) + md'(1 + at)}{(dm' + md')(1 + a''t)}$.

On déduira sans peine de cette formule les conditions nécessaires pour que la dilatation apparente du mélange soit positive, nulle ou négative.

8. On peut déterminer directement le rapport $\frac{m'}{m}$, ou le déduire de la formule générale du numéro précédent. En nombres, $\frac{m'}{m}$ est à peu près égal à 25,023.

9. On trouvera généralement

$$\frac{p}{p'}=\frac{D'-d}{D-d}\,\frac{D-d(1+8,2k)}{D'-d(1+8,2k')},$$

valeur facile à discuter; et dans le cas particulier du verre et du cuivre, on aura $\frac{p}{p'}=1,000087$.

10. En négligeant les variations de capacité des ballons, on trouvera

$$\delta=\frac{d(v+v')(1+at')}{v(1+at')+v'(1+at)},\qquad \delta'=\frac{d(v+v')(1+at)}{v(1+at')+v'(1+at)}.$$

a désigne ici le coefficient 0,00375 ou $\frac{3}{800}$.

11. $y=\frac{t}{5675-1,25\,t}$ . . . . (H).

Cette formule, calculée au moyen de deux observations, satisfait rigoureusement à la troisième. L'é-

quation (H) caractérise une hyperbole équilatère qu'il serait aisé de construire. La formule (H), qui m'a été communiquée par M. Babinet, remplacerait avec avantage les formules

$$y=\frac{t}{5550},\quad y=\frac{t}{5425},\quad \text{et } y=\frac{t}{5300},$$

qu'on a coutume d'employer respectivement de 0° à 100°, de 0° à 200° et de 0° à 300°. On pourrait encore appliquer au mercure la formule $\log\frac{v}{v_0}=\frac{at}{b-t}$, v_0 et v désignant les volumes que la même masse de ce liquide occupe à 0° et à $t°$.....

12. On trouvera $z=1,68345t-0,004817t^2$.

Vérification de cette formule.

Abaissements de température.	Contractions observées.	Contractions calculées.	Excès du calcul.
0°,0	0,00	0,00	0,00
6,1	9,88	10,09	+ 0,21
12,2	19,76	19,82	+ 0,06
20,3	32,27	32,19	− 0,08
25,9	40,37	40,37	0,00
31,0	47,81	47,56	− 0,25
40,5	59,56	60,28	+ 0,72
51,6	74,04	74,04	0,00
55,4	78,84	78,48	− 0,36

Les observations qu'il s'agissait ici d'interpoler sont dues à M. Gay-Lussac. Voyez les *Annales de chimie et de physique*, t. II, p. 130. On pourrait encore employer ici une expression de la forme $z = \frac{at}{b+t} \ldots\ldots$

15. Abstraction faite du frottement, le poids demandé est à peu près de $2^k,784$.

16. La formule dont il s'agit peut s'écrire ainsi :

$$e = 760^{mm}(1+0,7153t)^5.$$

Si l'on développe le second membre et si dans ce développement on néglige les termes en t^2.. t^5, il vient

$$e = 760 + 2718,14t.$$

Soit maintenant $t = \pm 0,01$; on aura

$$e - 760^{mm} = \pm 27^{mm},1814,$$

nombre très peu différent du nombre observé. La formule (L) du n° 37 de la *première partie* subirait la même épreuve avec le même succès.

17. Si l'on prend $\frac{5}{8}$ pour la densité de la vapeur, $1^g,2995$ pour le poids de 1^l d'air sec à 0° sous 76^c, et $\frac{3}{800}$ pour le coefficient de dilatation des gaz, si de plus on se sert de la *Table des élasticités de la va-*

peur d'eau, on trouvera par tâtonnement que t est à peu près égal à 54°,836.

18. x doit être au moins égal à 82,03, ce qu'on trouve en se servant de la *Table des élasticités de la vapeur d'eau* et des *Tables hygrométriques* de M. Biot.

19. Soit f l'élasticité maxima de la vapeur d'eau à t°, et soit θ la fraction de cette élasticité qui répond à n° de l'hygromètre. On trouvera, en désignant par a le coefficient de dilatation des gaz,

$$x=\frac{at+\frac{3}{8}\theta\frac{f}{h}}{a\left(1-\frac{3}{8}\theta\frac{f}{h}\right)}.$$

Pour $t=25$, on a $f=23^{\text{mm}},09$; de plus, pour $n=90$ on trouve $\theta=0,8311$ dans la *Table hygrométrique* de M. Melloni (voyez le *Traité de physique* de M. Despretz, 4ᵉ édition). On tirera de ces données $x=27°,79$.

20. A 35°,43.

21. 1° Ce poids est de $7319^{\text{mg}},7$; 2° l'hygromètre montera à 100°, il y aura sursaturation, et le poids de la vapeur liquéfiée sera par approximation les 0,2614 du poids total. (Cette solution et celle du numéro précédent supposent l'emploi des *Tables* de M. Biot relatives à la tension de la vapeur et à l'hygromètre.)

22. L'hygromètre marquera dans ce mélange 92°,1.

23. Voyez les remarques de M. Gay-Lussac sur cette méthode hygrométrique, *Annales de chimie et de physique*, t. XXX, p. 87.

24. Il est aisé de résoudre cette question, quand on connaît les densités et les chaleurs spécifiques des différents liquides.

25. $x=0,9$.

27. $x=0,2695$ environ.

28. $x=\frac{635m+m't-75m''}{m+m'+m''}$.

On peut discuter cette valeur de x. La discussion doit rouler sur les cas suivants : 1° $m=0$; 2° $m''=0$; 3° $m'=0$; 4° $x=t$ (ce 4e cas rentre dans le 3e); 5° $x \gtreqless 100$; 6° $x \gtreqless 0$. Dans le cas de $x>100$ ou dans celui de $x<0$, il y a lieu à interprétation. On peut se proposer alors de déterminer le poids de la vapeur ou de la glace qui sera *réellement* liquéfiée par le mélange.

29. $x=\frac{75m'}{m-m'}$.

30. $x=109,2$. Les nombres de cette expérience ont été imaginés de manière à s'accorder avec les

observations de M. Despretz sur la chaleur latente de la vapeur d'éther. Voyez le *Traité de physique* de M. Despretz.

31. $x = a' - (a'' - a') \frac{t' - \theta}{t'' - t'} - a \frac{\theta}{t}$.

Cette question est extraite du *Traité général de physique* de M. Biot, t. IV, p. 702. On suppose ici que la chaleur spécifique d'un corps soit constante pour le même état d'agrégation; ce qui n'est pas tout à fait exact. On pourrait aussi, à l'aide de ces trois expériences, déterminer comme inconnues accessoires les chaleurs spécifiques de l'étain solide et de l'étain liquide.

32. On mettra ce problème en équation, comme tous ceux de ce genre, en égalant dans chaque cas les pertes et les gains de chaleur. On sait que $v = 0,095$ et que $l = 535$ (1). m, m', m'', sont connues par des pesées faites avant et après la vaporisation. Par des expériences préalables que l'on calculerait approximativement en admettant que $c = c'$, et en négligeant p, p', p'', et les petites fractions m, m', m'', on pourrait déterminer d'avance M, M', M'', de manière que les températures b, b', b'', différassent très peu de la température ambiante au moment de chaque épreuve, ce qui dispenserait d'avoir égard à la chaleur enlevée ou cédée au mélange par les corps en-

(1) $\theta = 228$, suivant M. Rudberg.

vironnants. J'ai supposé que les masses d'eau fussent d'abord à 0°, parce qu'il est facile de les porter à cette température en faisant entrer les vases qui contiennent cette eau, et dont les parois extérieures ne doivent pas être humides, dans d'autres vases tout juste assez grands pour les recevoir et qui sont plongés eux-mêmes dans de la glace pilée. Les températures t' et t'' doivent être fort peu éloignées l'une de l'autre, parce que dans une étendue un peu grande de l'échelle thermométrique les variations de chaleur spécifique deviennent sensibles. Il est important de ne pas admettre d'avance que c doive être égal à c', même à des températures très rapprochées de celle de la fusion: car le changement d'état, surtout quand il est accompagné d'un changement notable de volume, peut faire varier la capacité pour la chaleur (1).

(1) L'énoncé de ce problème et les indications qu'on vient de lire sur les perfectionnements que ces expériences comportent me semblent réfuter cette assertion avancée par M. Rudberg dans les *Annales de chimie et de physique* (t. XLVIII, cahier de décembre 1831): « La *méthode des* » *mélanges* n'est pas applicable quand il s'agit de détermi- » ner la chaleur latente dans les métaux fluides dont la » température de solidification est aussi élevée que celle de » l'étain ou du plomb. »

M. Rudberg arrive à cette conclusion, après avoir exposé la méthode des mélanges dans l'état brut sous lequel Black s'en est servi pour déterminer la chaleur de fluidité de l'étain et de la cire, et il la rejette principalement 1° à cause de la perte de chaleur occasionnée par les vapeurs aqueuses

33. $t=\theta+\frac{(p-p'+cm')\theta+p'(100+t)}{cm}$.

Dans le cas des nombres qu'on a *imaginés*, il vient $t=520°$. En négligeant l'évaporation des $0^g,4$ d'eau, on trouverait $t=519°,05$.

34. Si l'on fait en sorte que θ diffère peu de θ', la chaleur spécifique moyenne du métal entre $x°$ et $\theta°$ sera sensiblement la même qu'entre $x°$ et $\theta'°$. On pourra donc éliminer cette inconnue entre les deux équations du problème, ce qui donnera

$$x=\frac{m'p\theta(\theta'-t')-mp'\theta'(\theta-t)}{m'p(\theta'-t')-mp'(\theta-t)};$$

et si, pour abréger, on pose

$$m'p(\theta'-t')=a, \quad mp'(\theta-t)=b,$$

il viendra

$$x=\frac{a\theta-b\theta'}{a-b}.$$

qui se forment lorsqu'on projette dans l'eau le métal liquéfié, 2° à cause de l'incertitude qui règne sur la chaleur spécifique de ce même métal à des températures voisines de celle de sa congélation.

En suivant la marche que j'ai tracée, il est évident qu'on affaiblirait beaucoup les erreurs signalées par M. Rudberg, et que la méthode des mélanges ainsi perfectionnée serait applicable à la mesure de la chaleur de fluidité, même pour les corps qui fondent entre 200° et 300°, tels que l'étain, le bismuth et le plomb.

Cette détermination d'une haute température x est préférable à celle qui est indiquée au numéro précédent, parce qu'ici l'on se rend indépendant des variations de la chaleur spécifique du métal. On pourrait d'ailleurs faire subir à ce nouveau procédé les corrections dont la *Méthode des mélanges* est susceptible. Cette heureuse modification de la méthode des mélanges a été proposée par M. Gay-Lussac (*Annales de chimie et de physique*, t. LXII, p. 335).

35. L'analogie (1) conduit à représenter les quantités y et y' par les formules empiriques

$$y=\frac{at}{b-t}, \qquad y'=\frac{a't}{b'-t}.$$

Soit prise pour unité de chaleur la chaleur qui élèverait de 1° (C) 1^k d'eau pure; en partant des données, on trouvera pour 1^k de cuivre

$$y=\frac{2403,3425\,t}{26125-8t},$$

et pour 1^k de zinc

$$y'=\frac{2352,2625\,t}{26475-11t}.$$

Les valeurs de y et de y' sont égales entre elles pour $t=285°,5663$.

(1) Voyez le n° 41 de la *première partie*.

56. Le tableau qui suit sert à comparer les nombres trouvés avec ceux qui ont été observés soit par Laplace et Lavoisier, soit par Rumford (1).

Dégagement de chaleur dû à la combustion

	Calculé d'après les données.	Observé par Laplace et Lavoisier.	Observé par Rumford.
Essence de térébenthine.	9738,22		
Cire blanche	9734,65	10500	9479
Huile d'olive	9268,70	11166	9044
Suif.	9017,94	7186	8369
Ether sulfurique	8325,24		8030
Alcool pur	7215,37		6195

Remarque. Si les données chimiques et thermométriques d'où l'on part étaient rigoureusement exactes, et s'il en était de même des expériences directes faites sur la combustion de ces substances composées, le dégagement de chaleur observé devrait être un peu plus faible que celui qui est calculé, parce qu'ordinairement la combustion est incomplète, soit à cause d'une évaporation partielle, soit à cause d'un contact insuffisant avec l'oxigène.

(1) *Traité général de physique* de M. Biot, t. IV, p. 716.

37. D'après M. Melloni (1), le sel gemme transmet les 0,923 de la chaleur incidente, et le laiton poli en réfléchit les 0,444. On déduira de ces données

$$\frac{R}{r}=1,4418.$$

Ayant rempli cette condition, et sachant que l'indice moyen de réfraction du sel gemme est égal à 1,557, on trouverait facilement le rapport des distances focales principales du miroir et de la lentille.

38. D'après Dulong et Petit (2), on a, pour une valeur quelconque de t,

$$\frac{v}{v'}=\frac{m(a^t-1)+nt^b}{m'(a^t-1)+nt^b};$$

les quantités a et b sont, pour tous les corps et dans tous les gaz, égales, la première à 1,0077 et la seconde à 1,233; les coefficients m et m' dépendent de la grandeur et de la nature de la surface, ainsi que de la température absolue de l'enceinte; le coefficient n, indépendant de cette température absolue, ainsi que de la nature de la surface du corps, varie avec la grandeur de cette surface et avec l'espèce et l'élasticité du gaz dans lequel le corps est plongé.

(1) *Annales de chimie et de physique*, t. LX, p. 402.
(2) *Ibid.*, t. VII, p. 359 et suivantes.

On trouve par les règles du calcul différentiel que l'excès cherché t est donné par l'équation transcendante

$$ta^t \text{Log} a - b(a^t - 1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

Log$a$ désignant le logarithme népérien de a. Cette équation est indépendante de m, m' et n. L'excès t de température qui répond au *minimum* demandé est donc toujours le même, quels que soient le corps chaud et le gaz ambiant. Après avoir remplacé a, Log$a$ et b, par leurs valeurs numériques, on résoudra l'équation (A) par un mode de tâtonnement facile à imaginer, et l'on obtiendra $t=56°,66$ (thermomètre centigrade).

Quant au *minimum* de $\frac{v}{v'}$, il dépend de m, m' et n. Voici les nombres indiqués par Dulong et Petit pour leur thermomètre, dont ils observaient le refroidissement dans l'air :

$$n=0,00857: \quad m=2,61; \quad m'=\frac{2,61}{5,707};$$

$\left(\frac{5,707}{1}\right.$ est le rapport des pouvoirs rayonnants du verre et de l'argent.) En partant de ces nombres, on trouve 1,785 pour le *minimum* de $\frac{v}{v'}$.

39. On a généralement

$$\frac{v}{v''} = \frac{m(a^t-1)+nt^b}{m(a^t-1)+n't^b}.$$

La valeur cherchée de t est celle qui satisfait à l'équation (A) du numéro précédent. On aura donc encore $t = 56°,66$.

Le *maximum* de $\frac{v}{v''}$ est aisé à déterminer, quand on connaît les valeurs numériques des constantes m, n et n'.

On remarquera que le *minimum* de $\frac{v}{v'}$ et le *maximum* de $\frac{v}{v''}$ correspondent au même excès de température, et que cet excès est le même pour tous les corps et dans tous les gaz (1).

40. La valeur générale de $\frac{v}{u}$ est

$$\frac{m(a^t-1)+nt^b}{m'(a^t-1)+n't^b}.$$

En cherchant ce que devient ce rapport 1° pour $t=0$, 2° pour t très petit, 3° pour $t=\infty$ (2), on re-

(1) Ces particularités curieuses ont échappé à l'attention de MM. Dulong et Petit, parce que, tout en apercevant l'existence d'un *minimum* pour $\frac{v}{v'}$ et d'un *maximum* pour $\frac{v}{v''}$, ils ne se sont pas arrêtés à déterminer les valeurs du *minimum* et du *maximum* et leurs positions dans l'échelle thermométrique.

(2) Ce moyen de distinguer le *minimum* d'avec le *maximum* est indiqué par Dulong et Petit pour les rapports $\frac{v}{v'}$ et $\frac{v}{v''}$.

connaît que $\frac{v}{u}$ est susceptible d'un *minimum* ou d'un *maximum*, suivant que l'on a

$$\frac{m}{m'} > \frac{n}{n'}, \quad \text{ou} \quad \frac{m}{m'} < \frac{n}{n'};$$

et l'on trouve que $\frac{v}{u}$ est constant, lorsque

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B).$$

L'excès t de température correspondant au *minimum* ou au *maximum* se déduira de l'équation

$$(nm' - mn')[ta^t \text{Log} a - b(a^t - 1)] = 0.$$

Cette équation est vérifiée, quel que soit t, quand la condition (B) est remplie. Mais si elle n'est pas remplie, il faudra supprimer le facteur $nm' - mn'$, et l'on retombera sur l'équation (A) du n° 38. On obtiendra donc encore le même excès de température 56°,66 (1).

(1) Les problèmes 38 et 39 étant des cas particuliers du problème 40, j'aurais pu ne proposer que ce dernier, dont la discussion aurait embrassé les deux autres. Mais en donnant les énoncés 38 et 39, je me suis conformé à l'ordre suivi par Dulong et Petit, qui dans leur *Mémoire sur les lois du refroidissement* ont fait varier d'abord m seul, puis n seul. Quant au cas général où m et n varient en même temps, ils ne l'ont pas considéré.

COMPLÉMENT DU CHAPITRE V.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES D'ÉLECTRICITÉ.

3. Voyez le *Traité général de physique* de M. Biot, t. II, p. 425.

4 et 5. On expliquera sans peine chacune de ces deux expériences en s'aidant, s'il le faut, d'une figure. Pour simplifier les dessins, on pourra substituer des *carreaux* de Leyde aux *bouteilles* de Leyde.

6. Soit n le nombre d'oscillations que fait d'abord par minute une aiguille électrisée en sens contraire du globe et qui en est éloignée d'une distance δ. Soit 1 la quantité primitive d'électricité de ce globe, et soit m la quantité que l'autre conducteur lui enlève; enfin soit n' le nombre d'oscillations que la même aiguille fait alors à la même distance δ du globe. On trouvera

$$\frac{1-m}{m}=\frac{n'^2}{n^2-n'^2}.$$

Nous proposerons le moyen suivant pour vérifier l'exactitude de l'expérience : si l'on désélectrise tout à fait le globe après que le conducteur l'a touché, et qu'on le mette de nouveau en contact avec ce conducteur, il lui reprendra une fraction $1-m$ de l'électricité m que ce conducteur lui avait enlevée. Quand le globe aura cette quantité $m(1-m)$ d'électricité, supposons que sous son influence l'aiguille fasse n'' oscillations par minute à la distance δ; on aura

$$\frac{(1-m)m}{1-m} \text{ ou } m=\frac{n''^2}{n'^2},$$

et par conséquent

$$\frac{n''^2}{n'^2}+\frac{n'^2}{n^2}=m+(1-m)=1.$$

Si donc on opère avec promptitude et adresse dans un air très sec; les nombres observés n, n' et n'' devront satisfaire approximativement à la condition

$$\frac{n''^2}{n'^2}+\frac{n'^2}{n^2}=1.$$

7. Puisqu'on égale à la force de torsion une force répulsive approchée φ au lieu de la force répulsive efficace f dirigée suivant la tangente, l'erreur commise ε est l'excès de la force approchée φ sur la force réelle f divisé par cette force f. En admettant que

les actions électriques soient en raison inverse des puissances n des distances, on trouve

$$\varepsilon \text{ ou } \frac{\varphi-f}{f}=\left(\frac{\sin a}{a}\right)^n\frac{1}{\cos a}-1,$$

valeur qui s'approche de zéro à mesure que l'arc a diminue. Or en posant l'équation exacte du problème et en partant des nombres observés, on vérifie rigoureusement l'hypothèse de $n=2$. Il vient donc

$$\varepsilon=\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2\frac{1}{\cos a}-1=\frac{\sin a \tan a}{a^2}-1.$$

Soit $2a=36°=\frac{\pi}{5}$, on obtient $\varepsilon=0,0173=\frac{1}{57,8}$.

Pour $2a=18°=\frac{\pi}{10}$, ε se réduit à $0,0042=\frac{1}{238,1}$.

8. On trouve approximativement

$$\frac{e'}{e}=\left(\frac{13}{10}\right)^3=2,197.$$

On aurait pour la valeur exacte de $\frac{e'}{e}$,

$$\frac{e'}{e}=\frac{13\sin 6°30' \tan 6°30'}{10 \sin 5° \tan 5°}=2,19894.$$

9. Voici quelques indications relatives à l'expérience proposée;

On emploierait de petites boules métalliques, dont l'une, suspendue au fléau par un long fil de soie, remplacerait un des bassins de la balance; l'autre serait attachée à une tige horizontale de verre verni qui pourrait glisser le long d'une règle verticale divisée.

A une distance d on trouverait d'abord un poids p qui ferait équilibre à l'action électrique. Au bout d'une minute, on trouverait un poids p' à la distance d'. Au bout d'une seconde minute, opérant de nouveau à la distance d, on trouverait un poids p''. On prendrait $p' : \frac{p+p''}{2}$ pour le rapport des forces qui correspondraient aux distances d' et d.

Les distances d et d' seraient comptées entre les centres des deux petites boules. La balance devrait être fort sensible. On accélérerait les pesées par des essais préalables, qui feraient connaître approximativement p, p' et p'' (1).....

10. On obtient $\frac{e}{e'} = \frac{\tang\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\tang\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta'}{2}}$,

ou par approximation $\frac{e}{e'} = \frac{\theta^2}{\theta'^2}$.

(1) Il n'est pas nécessaire de faire observer que, pour cet usage et en général pour la mesure des forces très petites, la balance de torsion est bien préférable à la balance ordinaire.

On observerait les arcs θ et θ' au moyen d'une division tracée sur une cage cylindrique de verre, comme dans la balance de torsion.

Si les deux sphères C et C' étaient égales et qu'on eût une troisième sphère métallique de même diamètre, il serait aisé de rendre e égal à $2e'$. En ce cas les valeurs de θ et de θ' données par l'expérience devraient satisfaire à la condition

$$\tang\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=2\tang\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta'}{2},$$

ce qui servirait à vérifier la loi de la raison inverse des carrés des distances.

11. Si l'on remplace 45' par t, $\frac{1}{41}$ par a, les torsions initiale et finale par F_0 et par F_t, on arrive à la formule générale

$$F_t=F_0\left(\frac{1-\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{2}a}\right)^t \quad \ldots \quad (\varphi).$$

Dans l'exemple proposé $F_t=50^\circ\ 3'$. L'observation a donné à Coulomb $F_t=50^\circ$.

M. Biot (*Traité général de physique*, t. II, p. 252) trouve 50° 3' 10", en appliquant une formule un peu moins élémentaire que (φ).

12. Soient F_0 la force répulsive initiale, F_t cette force au bout de t minutes, A et A' les angles de ré-

pulsion au bout des temps o et t. Nous tirons de la formule (φ) du numéro précédent

$$a=\frac{F_o^{\frac{1}{t}}-F_t^{\frac{1}{t}}}{\frac{1}{2}\left(F_o^{\frac{1}{t}}+F_t^{\frac{1}{t}}\right)},$$

expression que nous transformons en celle-ci

$$a=\frac{(A\tan g\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}A)^{\frac{1}{t}}-(A'\tan g\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}A')^{\frac{1}{t}}}{\frac{1}{2}\left[(A\tan g\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}A)^{\frac{1}{t}}+(A'\tan g\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}A')^{\frac{1}{t}}\right]}.$$

En partant des observations extrêmes relatives à chaque électricité, nous trouvons

$$a=0{,}0203396, \qquad a'=0{,}0213673.$$

La formule déjà employée par M. Biot pour calculer les observations du numéro précédent le conduit aux valeurs suivantes :

$$a=0{,}0203342, \qquad a'=0{,}0213699.$$

Ces valeurs sont respectivement très peu différentes des nôtres. La petite différence des coefficients a et a', ajoute M. Biot, tombe dans les limites des erreurs que ces expériences comportent. Il suit de là que les électricités positive et négative éprouvent des déperditions sensiblement égales par le contact de l'air (*Traité général de physique*, t. II, p. 257).

COMPLÉMENT DU CHAPITRE VI.

SOLUTIONS DES PROBLEMES DE MAGNÉTISME ET D'ÉLECTRO-MAGNETISME.

1. On prendrait deux cylindres d'acier fortement trempé, très longs et très régulièrement aimantés. L'un d'eux serait suspendu par un fil à l'extrémité du fléau et remplacerait un des bassins. Les deux aimants seraient placés verticalement, de manière que leurs axes fussent sur le prolongement l'un de l'autre. On compterait les distances entre les *pôles* voisins, et non pas entre les extrémités voisines. Il faudrait que la balance fût très sensible, qu'elle eût un fléau de cuivre rouge, et que le *couteau* seul y fût d'acier. Outre la loi relative aux distances, on pourrait constater qu'à distances égales l'attraction mutuelle de deux pôles contraires fait équilibre au même poids que la répulsion de deux pôles semblables de mêmes forces que les premiers.....

4. On reconnaît par des considérations très simples de statique que l'aiguille *ab* doit marcher vers le pôle A contraire à son pôle supérieur *b*, le dé-

passer et se fixer à une certaine distance au delà du pôle A, dans le plan vertical mené par l'axe de l'aimant AB.

On peut résoudre cette question algébriquement : Soit h la hauteur de l'axe du barreau AB au-dessus du pôle supérieur b de l'aiguille ab ; soit l la distance du pôle b au pôle a ; soit $2c$ la distance du pôle B au pôle A ; enfin soit x la distance finale de l'aiguille à la verticale abaissée du centre du barreau AB. On a pour l'équation d'équilibre de l'aiguille,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-c}{(\overline{x-c}^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+c}{(\overline{x+c}^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}= \\[2ex] \dfrac{x-c}{(\overline{x-c}^2+\overline{h+l}^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+c}{(\overline{x+c}^2+\overline{h+l}^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right.$$

Cette équation, d'où l'on tirerait l'inconnue x, reste la même quand on y change x en $-x$, ce qui indique deux positions d'équilibre situées symétriquement par rapport à la verticale menée du centre du barreau. L'une de ces deux positions est celle de l'équilibre stable, l'autre est celle de l'équilibre instable.

Si l'on négligeait les actions exercées par les pôles A et B sur le pôle inférieur a de l'aiguille, ou algébriquement si l'on faisait $l=\infty$, l'équation se réduirait à

$$\frac{x-c}{(\overline{x-c}^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x+c}{(\overline{x+c}^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=0;$$

on la ramènerait sans peine à une équation du troisième degré privée de second terme, et ayant pour inconnue $\frac{1}{x^2-c^2}$.

Si l'on supposait $l=0$, c'est-à-dire si la longueur de l'aiguille *ab* était infiniment petite par rapport à celle du barreau AB, l'équation générale deviendrait $0=0$, ce qui serait le signe de l'indétermination; l'aiguille serait alors en équilibre dans toutes les positions possibles. Tel serait le cas où le barreau AB serait remplacé par l'aimant terrestre. L'aiguille *ab*, sollicitée par le globe seul, est *astatique*, pourvu que la résistance du flotteur de liége la maintienne dans une direction exactement verticale.

5. On trouve pour l'équation d'équilibre de l'aiguille $\alpha\beta$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a(c+p)\sin\theta+ah\cos\theta}{\left(\overline{h+a\sin\theta}^2+\overline{c+p-\cos\theta}^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{ah\cos\theta-a(c-p)\sin\theta}{\left(\overline{h+a\sin\theta}^2+\overline{c-p+a\cos\theta}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ =\frac{bh\cos\theta-b(c-p)\sin\theta}{\left(\overline{h-b\sin\theta}^2+\overline{c-p-b\cos\theta}^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{bh\cos\theta+b(c+p)\sin\theta}{\left(\overline{h-b\sin\theta}^2+\overline{c+p+b\cos\theta}^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{array}\right.$$

Si l'on pouvait regarder l'aiguille $\alpha\beta$ comme infiniment petite par rapport aux distances *c*, *h* et *p*, il faudrait faire $b=a$, diviser ensuite par *a* les deux membres de l'équation, puis supposer $a=0$, ce qui donnerait

$$\frac{h+(c+p)\,\text{tang}\,\theta}{\left(h^2+\overline{c+p}^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{h-(c-p)\,\text{tang}\,\theta}{\left(h^2+\overline{c-p}^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette équation, qu'il serait d'ailleurs facile d'établir immédiatement, ferait connaître l'angle θ. Cette valeur de θ indique la limite des directions d'équilibre qu'un aimant imprimerait à une aiguille astatique dont le centre serait fixe et dont la longueur diminuerait de plus en plus.

Notre dernière équation est aussi applicable au cas où, l'aiguille $\alpha\beta$ étant suspendue par son centre de gravité, le barreau AB n'est autre chose que l'aimant terrestre. L'angle θ est alors l'inclinaison de l'aiguille aimantée sur l'axe magnétique du globe. Mais comme les quantités c, h et p, ne sont pas connues, on ne peut tirer parti de l'équation.

6. Les pôles contraires a et b', a' et b, doivent être placés du même côté de l'axe vertical de rotation, et il faut qu'on ait $\cos x = \frac{n^2}{n'^2}$....

7. 1° $x = \sqrt{n^2 + n'^2}$; 2° $y = \sqrt{n^2 - n'^2}$;

3° $\tang \varepsilon = \frac{n'^2 \sin\alpha}{n^2 + n'^2 \cos\alpha}$; 4° $z = \sqrt{n^4 + 2n^2n'^2\cos\alpha + n'^4}$.

Soit $\alpha = 0$, il vient $z = \sqrt{n^2 + n'^2} = x$. Soit $\alpha = \pi$, il vient $z = \sqrt{n^2 - n'^2} = y$. La valeur de z comprend donc les valeurs de x et de y comme cas particuliers, ce qu'on devait prévoir.

8. 1° En négligeant les actions des pôles P et P′ sur le pôle le plus éloigné B de l'aiguille, on trouve

$$R : R' :: \frac{(a^2 + l^2 - 2al\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{a} : \frac{(a'^2 + l^2 - 2a'l\cos\theta')^{\frac{3}{2}}}{a'}.$$

Si l'on n'observait pas les angles d'écart θ et θ', mais qu'on mesurât les distances finales m et m' des pôles P et P' au pôle repoussé A, il faudrait écrire

$$R : R' :: \frac{m^3}{a} : \frac{m'^3}{a'}.$$

Si l'on avait $a' = a = l$, c'est-à-dire si chaque pôle repoussant prenait la place du pôle repoussé, on aurait

$$R : R' :: m^3 : m'^3 :: \sin^3 \frac{\theta}{2} : \sin^3 \frac{\theta'}{2}.$$

2° En tenant compte des actions de P et de P' sur le pôle B, et en supposant CB = CA, on obtient

$$\frac{R}{R'} = \frac{\frac{1}{a} \frac{\left(\overline{a^2+l}^2 - 4a^2 l^2 \cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{(a^2+l^2-2al\cos\theta)^{\frac{3}{2}} + (a^2+l^2+2al\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{a'} \frac{\left(\overline{a'^2+l^2}^2 - 4a'^2 l^2 \cos^2\theta'\right)^{\frac{3}{2}}}{(a'^2+l^2-2a'l\cos\theta')^{\frac{3}{2}} + (a'^2+l^2+2a'l\cos\theta')^{\frac{3}{2}}}},$$

ou, si l'on désigne par n et par n' les distances finales du pôle B aux pôles P et P',

$$R : R' :: \frac{m^3 n^3}{a(m^3+n^3)} : \frac{m'^3 n'^3}{a'(m'^3+n'^3)}.$$

Dans cette solution, comme dans la première, on néglige l'influence de l'un des pôles de chaque aimant. L'erreur commise est d'autant plus faible que les longueurs des aimants M et M' sont plus grandes

relativement aux distances a et a', m et m', n et n'. Il faut avoir soin de diriger les axes des barreaux M et M' de manière à éloigner le plus possible de l'aiguille les pôles dont on fait abstraction.

9. On mesurera la distance OK ou a du point O milieu de AA' au point K, projection de ab sur AA'. Si l'on pose $Aa=m$, $Ab=n$, $A'a=m'$, $A'b=n'$, $ab=l$, et qu'on néglige les pôles supérieurs des aimants M et M', on trouvera

$$R : R' :: \frac{m^3n^3}{(c-a)(m^3-n^3)} : \frac{m'^3n'^3}{(c+a)(m'^3-n'^3)}.$$

On a d'ailleurs les relations

$$\begin{cases} m^2=(c-a)^2+(h+l)^2, \\ n^2=(c-a)^2+h^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} m'^2=(c+a)^2+(h+l)^2, \\ n'^2=(c+a)^2+h^2. \end{cases}$$

10. $R : R' :: \frac{ag}{\sin i} : \frac{a'g'}{\sin i'}$.

On conçoit aisément que cette méthode de comparaison serait fort inexacte.

11. Voyez le *Traité général de physique* de M. Biot, t. III, p. 93.

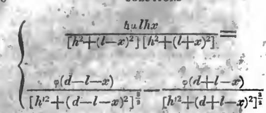
12. Voyez le *Traité général de physique* de M. Biot, t. III, p. 23 et 93. Toutefois nous prévenons que les considérations auxquelles il faut recourir ne sont pas élémentaires.

13. On emploierait une aiguille à coudre *ab* (fig. 26) longue et mince, suspendue verticalement à un long fil de soie S. Le fil métallique fixé près d'elle serait plié de manière à présenter dans le même plan quatre parties rectilignes ou *branches* parallèles entre elles et perpendiculaires à cette aiguille. Les deux branches intermédiaires répondraient au milieu de l'aiguille, et les deux branches extrêmes seraient situées un peu au delà de ses pôles. On rendrait chaque branche multiple en prenant un fil métallique couvert de soie, qui formerait sur lui-même plusieurs circonvolutions semblables..... On aurait ainsi quatre forces ou quatre systèmes de forces qui agiraient sur l'aiguille dans le même sens, soit par attraction, soit par répulsion.

Nous avons constaté que ce rhéoscope peut manifester de très faibles courants voltaïques.

14. Soit μ l'action du premier courant C sur un des pôles de l'aiguille *ab* à l'unité de distance ; μ est en raison composée de l'intensité du courant et de la force du pôle. Soit φ l'action du pôle B sur *a* ou sur *b* à l'unité de distance ; la constante φ est en raison composée de la force de B et de celle de *a* ou de *b*. En négligeant le pôle éloigné A, on arrive dans le premier cas à l'équation d'équilibre (1) :

(1) Voyez, pour l'intelligence du premier membre de l'équation qui suit, le *Traité de physique* de M. Lamé, t. II, 2e partie, p. 199.



$$\left\{\begin{aligned}&\frac{4\mu lhx}{[h^2+(l-x)^2][h^2+(l+x)^2]}=\\&\frac{\varphi(d-l-x)}{[h'^2+(d-l-x)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{\varphi(d+l-x)}{[h'^2+(d+l-x)^2]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

Il suffit de changer μ en μ' et x en x' pour obtenir l'équation qui répond au second courant. On divisera ces deux équations membre à membre, on supprimera le facteur commun φ, et l'on trouvera sans peine $\frac{\mu}{\mu'}$, qui est le rapport cherché.

Si dans les deux expériences successives le courant projeté en C restait le même, et que dans la seconde on remplaçât l'aimant AB par un autre aimant A'B', μ conserverait la même valeur dans les deux équations d'équilibre, mais il faudrait changer φ en φ' dans la deuxième. En les divisant encore membre à membre, on ferait disparaître le facteur commun μ, et l'on aurait ainsi le rapport $\frac{\varphi}{\varphi'}$ des forces des deux aimants. On voit donc que notre *méthode rhéométrique* légèrement modifiée pourrait donner aussi le rapport des forces de deux aimants.

15. L'aiguille *tripolaire* ABA' est évidemment astatique. On trouve pour son moment de rotation vers la gauche du courant

$$\frac{2ml^2(l^2+x^2-y^2)}{(l^2+x^2+y^2)^2-4l^2y^2},$$

m désignant l'intensité de l'action du courant sur le pôle A ou sur le pôle A' à l'unité de distance. Il suit de cette expression que pour l'équilibre de l'aiguille il faut qu'on ait $l^2+x^2-y^2=0$; c'est-à-dire que le point P doit être sur une hyperbole équilatère ayant pour axe transverse AA' ou $2l$ et tracée dans le plan AA'P. Pour toute autre position de P l'aiguille tournerait autour de son centre B, *entraînant son hyperbole avec elle*, et après quelques oscillations elle se fixerait dans la direction pour laquelle l'hyperbole mobile aurait atteint le point P. Toutefois cette rencontre ne pourrait avoir lieu si le point P était dans l'intérieur de la circonférence de cercle décrite sur AA' comme diamètre. Dans ce cas l'aiguille tournerait, jusqu'à ce qu'un de ses points rencontrant le point fixe P, le mouvement se trouvât arrêté par cet obstacle, et l'aiguille demeurerait en contact avec le fil rhéophore.

COMPLÉMENT DU CHAPITRE VII.

SOLUTIONS DES PROBLEMES D'ACOUSTIQUE.

3. On a $2 = \left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{10}{9}\right)^2\left(\frac{16}{15}\right)^2$;
les exposants 3, 2 et 2 sont les nombres qu'il fallait mettre en évidence.

4. 1° Pour la tierce majeure on a $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ ou $\frac{125}{64} < 2$. Soit x le rapport qu'il faudrait substituer à $\frac{5}{4}$: on devrait avoir $x^3 = 2$; d'où l'on tirerait $x = \sqrt[3]{2}$. $\sqrt[3]{2}$ serait donc la valeur numérique de la tierce modifiée qui répondrait à la question; et comme on peut écrire $\sqrt[3]{2}$ sous la forme de $\sqrt[12]{2^4}$, il est clair qu'on retomberait sur la tierce employée dans la gamme tempérée.

2° Pour la tierce mineure on parviendrait à un résultat semblable.

5. Oui, car 1° pour trois quintes superflues on a dans la gamme tempérée $\left(2^{\frac{8}{12}}\right)^3 = 2^2$, tandis que

dans la gamme enharmonique on a $\left(\frac{25}{16}\right)^3 = \frac{15625}{4096}$, rapport plus petit que 2^2 ou 4; 2° pour les deux quintes diminuées, on arrivera sans peine à la même conclusion.

6. On trouve pour les indices x, y et z, $x=3$, $y=5$, $z=3$; ces notations sont connues; on sait, par exemple, que $la^{\flat}_{-3}$ désigne le $la^{\flat}$ de la troisième octave au dessous de l'octave fondamentale.

La valeur de chacune des *quintes faibles* est

$$\sqrt[4]{5}=1,4954.$$

La valeur de chacune des *quintes fortes* est

$$\sqrt[4]{\frac{128}{25}}=1,5042.$$

Le comma $\frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^3}$ ou $\frac{128}{125}$, relatif aux trois tierces (*ut mi*), (*mi sol*♯) et (*sol*♯ *ut*$_2$), était reporté entièrement sur la troisième tierce (*sol*♯ *ut*$_2$). Car si l'on divise $\frac{2}{\left(\frac{25}{16}\right)}$ par $\frac{5}{4}$, on a pour quotient $\frac{128}{125}$.

Le tableau de la page suivante offre la comparaison de l'ancienne gamme avec les gammes naturelle et tempérée :

Notes.	Sons de la gamme naturelle.	Sons de la gamme tempérée.	Sons de la gamme à deux tierces justes.
ut	$1=1{,}0000$	$1=1{,}0000$	$1=1{,}000$
ut♯		$2^{\frac{1}{12}}=1{,}05946$	$\frac{5}{16}\sqrt[4]{5^3}=1{,}0449$
re	$\frac{9}{8}=1{,}1250$	$2^{\frac{2}{12}}=1{,}12246$	$\frac{1}{2}\sqrt{5}=1{,}11804$
re♯		$2^{\frac{3}{12}}=1{,}1892$	$\frac{1}{8}\sqrt[4]{\frac{(25)^3}{2}}=1{,}1752$
mi	$\frac{5}{4}=1{,}2500$	$2^{\frac{4}{12}}=1{,}2599$	$\frac{5}{4}=1{,}2500$
fa	$\frac{4}{3}=1{,}3333$	$2^{\frac{5}{12}}=1{,}33484$	$\sqrt[4]{\frac{25}{8}}=1{,}3296$
fa♯		$2^{\frac{6}{12}}=1{,}4142$	$\frac{5}{8}\sqrt{5}=1{,}3975$
sol	$\frac{3}{2}=1{,}5000$	$2^{\frac{7}{12}}=1{,}4983$	$\sqrt[4]{5}=1{,}4954$
sol♯		$2^{\frac{8}{12}}=1{,}5874$	$\frac{25}{16}=1{,}5625$
la	$\frac{5}{3}=1{,}6667$	$2^{\frac{9}{12}}=1{,}6818$	$\frac{1}{2}\sqrt[4]{5^3}=1{,}6718$
la♯		$2^{\frac{10}{12}}=1{,}7818$	$\sqrt{\frac{25}{8}}=1{,}7678$
si	$\frac{15}{8}=1{,}8750$	$2^{\frac{11}{12}}=1{,}8877$	$\frac{5}{4}\sqrt[4]{5}=1{,}8692$
ut_2	$2=2{,}0000$	$2^{\frac{12}{12}}=2{,}0000$	$2=2{,}0000$

On peut comparer avec plus de clarté et de précision cette ancienne gamme aux gammes naturelle et tempérée en se servant des *logarithmes acoustiques* (1), ce qui revient à exprimer chaque son par le nombre de semi-tons moyens dont il est élevé au dessus d'un son fixe qui est ordinairement un *ut*.

Notes.	Gamme naturelle.	Gamme tempérée.	Gamme ancienne.
	st.	st.	st.
ut	0,00	0,00	0,00
ut♯		1,00	0,76
re	2,04	2,00	1,93
re♯		3,00	2,79
mi	3,86	4,00	3,86
fa	4,98	5,00	4,93
fa♯		6,00	5,79
sol	7,02	7,00	6,97
sol♯		8,00	7,73
la	8,84	9,00	8,90
la♯		10,00	9,86
si	10,88	11,00	10,83
ut$_2$	12,00	12,00	12,00

(1) On sait que ces logarithmes ont pour base $2^{\frac{1}{12}}$, c'est-à-dire la racine douzième de 2 (qui est égale à 1,05946.....). Il ne sera peut-être pas inutile de placer ici un résumé succinct de l'*Instruction élémentaire* que M. de Prony a ré-

Chaque quinte faible de l'ancienne gamme valait $6^{st},97$, et chaque quinte forte $7^{st},07$, ce qui donnait lieu dans les deux cas à un comma de $0^{st},05$.

digée sur ce mode de représentation des intervalles musicaux.

Lorsqu'on veut seulement représenter les intervalles des sons, sans considérer leurs hauteurs absolues, il y a de l'avantage à remplacer les rapports des nombres de vibrations synchrônes par les logarithmes de ces mêmes rapports. D'après le choix de la base $2^{\frac{1}{12}}$, les sons de la gamme tempérée seront désignés par des nombres entiers. Ainsi, en partant de ut_1 qui sera zéro, on exprimera *mi* par 4, *sol* par 7, ut_2 par 12..... Quant aux notes naturelles (autres que les *ut* successifs), leurs logarithmes acoustiques seront des nombres fractionnaires qu'il sera facile de calculer. Par exemple, pour le véritable *mi* l'on aura $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^x = \frac{5}{4}$; relation d'où l'on tirera, à l'aide des tables de logarithmes vulgaires, $x=3,86$. On trouverait de même 7,02 pour le logarithme acoustique du véritable *sol*. En outre $2^{\frac{1}{12}}$ étant la raison de la progression géométrique que les nombres consécutifs de vibrations synchrônes suivent dans la gamme tempérée, il est évident que les logarithmes pris dans cette base peuvent être regardés comme désignant les nombres de *semi-tons moyens* ou de *douzièmes d'octave* qui séparent les différents sons d'avec le son fondamental. Ainsi, représenter par 4 et par 7 le *mi* et le *sol* tempérés, c'est caractériser ces deux sons par les nombres de semi-tons moyens dont chacun d'eux est distant de *ut*. De même le *mi* et le *sol* naturels sont élevés au dessus de *ut*, l'un de $3^{st},86$ (c'est-à-dire de 3 semi-tons moyens, plus $\frac{86}{100}$ de semi-ton moyen), et l'autre de $7^{st},02$. L'emploi des logarithmes acoustiques s'accorde donc avec le

Cette altération est, suivant Chladni (*Traité d'acoustique*, p. 38), la plus grave qu'une quinte puisse supporter sans blesser l'oreille. Enfin la troisième tierce (*sol# ut₂*) était trop forte de $0^{\prime\prime},41$.

7. On trouve $a = \frac{9079}{61}$, $b = \frac{109680}{61}$. L'équation demandée peut s'écrire sous la forme

$$y = 2^{\frac{9079x}{109680 - 61x}} \quad \ldots\ldots \text{(G)}.$$

choix qu'on a fait du semi-ton moyen pour unité d'intervalle. Remarquons d'ailleurs que dans le langage musical on a coutume de substituer des *sommes* ou des *différences* d'intervalles à des *produits* ou à des *quotients* de nombres de vibrations synchrônes. On dit, par exemple, qu'une quarte *ajoutée* à une quinte donne une octave $\left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2\right)$; on dit qu'un ton mineur est égal à un ton majeur *diminué* d'un comma $\left(\frac{10}{9} = \frac{9}{8} : \frac{81}{80}\right)$..... Ces transformations habituelles, que les musiciens font sans le savoir, étant reproduites par les logarithmes, on conçoit que l'introduction des logarithmes acoustiques était préparée d'avance par le langage reçu, et qu'elle doit aussi l'éclaircir et le régulariser.

Le lecteur qui voudra se familiariser avec l'usage de ces logarithmes pourra les appliquer à la gamme des Arabes, dans laquelle l'octave est partagée en dix-sept intervalles égaux. (Voyez à ce sujet une *note* publiée par M. Vincent, dans l'*Institut* du 21 juin 1838.)

Comparaison de la gamme à quarte juste *avec les gammes naturelle et tempérée.*

Notes.	Gamme naturelle.	Gamme tempérée.	Gamme proposée.	Gamme proposée.
	st.	st.	st.	vibrations synchrônes.
ut	0,00	0,00	0,00	1,0000
re	2,04	2,00	1,99	1,1217
mi	3,86	4,00	3,98	1,2586
fa	4,98	5,00	4,98	1,3333
sol	7,02	7,00	6,98	1,4966
la	8,84	9,00	8,98	1,6803
si	10,88	11,00	10,99	1,8871
ut_2	12,00	12,00	12,00	2,0000

Il suit de ce tableau que la gamme proposée diffère peu de la gamme tempérée, et se rapproche un peu plus que celle-ci de la gamme naturelle.

Un monocorde vertical à poids constant servirait à réaliser les sons calculés d'après l'équation (G). Il est clair que cette formule ne devrait être employée que pour les sons de l'octave fondamentale. Quant aux sons compris dans les octaves inférieures et supérieures, on les obtiendrait en prenant les octaves convenables des sons donnés par l'équation (G).

8. On trouve

$$1^\circ\ y=1+\frac{x(23+x)}{420},\qquad 2^\circ\ y=1+\frac{7x}{120-3x}.$$

Dans la gamme déduite de la première équation, l'octave, la quarte et la quinte sont justes ; la tierce est peu altérée, mais les trois autres intervalles paraissent l'être un peu trop. Dans la gamme tirée de la seconde équation, tous les intervalles sont satisfaisants, hors la quinte, qui est un peu trop faible (1).

9. En désignant $2^{-\frac{1}{12}}$ ou 0,94387... par a, on obtient $x = \frac{1-a^{\frac{n}{m}}}{1-a}$. Cette valeur de x diffère très peu de $\frac{n}{m}$. En effet soit $b = 1 - a = 0,05613$; il vient

$$x = \frac{1-(1-b)^{\frac{n}{m}}}{b} = \frac{n}{m} + \frac{n(m-n)}{1.2m^2}b + \frac{n(m-n)(2m-n)}{1.2.3m^3}b^2 + \dots$$

Comme on suppose $n < m$, tous les termes de ce développement sont positifs, d'où il suit qu'on a $x > \frac{n}{m}$. Mais b étant une petite fraction, on peut se borner sans grande erreur au premier terme de la série, et

(1) Pour apprécier exactement la valeur musicale de chacune des trois gammes nouvelles, il faudrait entrer dans des considérations fort délicates. Il n'est pas nécessaire d'entreprendre ici cette discussion, qui demanderait d'ailleurs à être éclairée par l'expérience. On peut ne voir dans les gammes proposées que des exercices de calcul acoustique.

prendre $x = \frac{n}{m}$. Le tableau suivant donnera la mesure de cette approximation :

Fraction $\frac{n}{m}$ de semi-ton moyen.	Fraction x de l'intervalle c.	Différence des deux fractions.
$\frac{1}{4} = 0{,}2500$	0,255	0,005
$\frac{1}{3} = 0{,}3333$	0,3396	0,0063
$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	0,507	0,007
$\frac{2}{3} = 0{,}6667$	0,6733	0,0066
$\frac{3}{4} = 0{,}7500$	0,755	0,005

On voit que ces différences entre x et $\frac{n}{m}$ seraient inappréciables dans la pratique (1). Donc pour que le

(1) C'est pour éviter l'emploi du calcul différentiel que j'ai présenté ce tableau. Mais à l'aide des règles de ce calcul il serait aisé d'évaluer le maximum de la différence

$$\frac{1-a^{\frac{n}{m}}}{1-a} - \frac{n}{m}.$$

On trouverait pour la valeur de $\frac{n}{m}$ qui répond à ce maximum,

$$\frac{n}{m} = \frac{\log(\log e) + \log(1-a) - \log(-\log a)}{\log a},$$

e désignant la base des logarithmes népériens ; d'où il suit,

son S s'élève des $\frac{n}{m}$ d'un semi-ton moyen, il faut raccourcir la corde vibrante des $\frac{n}{m}$ de l'intervalle des deux touches consécutives, ce qu'on peut faire avec un petit prisme de bois placé entre le manche et la corde.

10. Le son S, que Chladni nomme le *son ronflant* de la corde, est plus grave d'une quinte que le son ordinaire de la corde entière. (Voyez l'*Acoustique* de Chladni, p. 58, ou le *Traité général de physique* de M. Biot, t. II, p. 53).

11. Dans le premier exemple on trouve 4 sons différents, dont 3 sont produits par des coïncidences *binaires* de vibrations, et 1 par des coïncidences *ternaires*.

Dans le second exemple 3 des 4 *sons résultants* se confondent en un seul, qui doit être d'une grande intensité.

Il est facile de généraliser ce problème, en consi-

comme on sait, que $\log(\log e) = -0{,}3622157$; d'ailleurs $a = 0{,}94387\ldots$ Or cette valeur de $\frac{n}{m}$ est à peu près égale à 0,4962, et la valeur qui en résulte pour x est d'environ 0,5034; d'où l'on conclut que le maximum de $x - \frac{n}{m}$ ne s'élève qu'à 0,0072, différence que l'observation ne pourrait saisir. La détermination de ce maximum conduit donc aux mêmes conséquences que l'inspection de notre tableau.

dérant *n* corps sonores placés aux *n* sommets d'un polygone régulier dont le centre serait occupé par l'observateur. Les sons résultants seraient dus à des coïncidences binaires, ternaires, quaternaires....(1).

(1) Cette extension du phénomène découvert par Tartini ne me paraît avoir été vérifiée directement que dans le cas particulier où tous les *sons résultants* se confondent en un seul (voyez le *Traité général de physique* de M. Biot, t. II, p. 50). M. Desiré Catillon (de la Fère), professeur de mathématiques et musicien distingué, qui a bien voulu m'indiquer cette question, se propose de la traiter lui-même par des expériences variées.

COMPLÉMENT DU CHAPITRE VIII.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES D'OPTIQUE.

1. $x = \frac{2a}{2a+p}$.

Cette question est applicable aux phares par réflexion (voyez les *Annales de chimie et de physique*, t. XXXVII, p. 394).

2. L'erreur consiste à confondre les arcs d'incidence avec leurs tangentes, ce qu'il est facile de constater par la géométrie : on trace un rayon incident parallèle à l'axe, la normale et le rayon réfléchi ; on mène par le point d'incidence une tangente au grand cercle qui contient le rayon incident; on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre le prolongement de l'axe du miroir; enfin l'on considère les triangles de la figure..... La même construction montre qu'en réalité le rayon réfléchi coupe l'axe plus près de la surface que de son centre.

3. Soit x la distance de l'objet lumineux au miroir concave M, on a

$$x = \frac{dfm' + ff'(m+m')}{fm' + mf'}, \quad d - x = \frac{dmf' - ff'(m+m')}{fm' + mf'}.$$

On discuterait sans peine ces formules. Elles s'appliquent aussi au cas de deux lentilles conjuguées. Seulement f et f' ne représentent plus alors des demi-rayons de courbure, mais bien les distances focales principales des deux lentilles. d est la distance de leurs centres optiques. On pourrait aussi considérer un objet placé entre une lentille et un miroir.....

5. Cette démonstration est facile si l'on trace les cercles et les droites qui entrent dans l'énoncé, et si l'on observe que le point générateur M doit coïncider, à l'origine de son mouvement, avec le foyer principal situé sur le diamètre parallèle aux rayons incidents (1).

6. 1° En mettant l'expression connue

$$v = 2\left[\operatorname{arc}\left(\sin = l \sin\frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}\right]$$

sous la forme

$$v = 2\left[(l-1)\sin\frac{a}{2} + \frac{1}{2}(l^3-1)\frac{\sin^3\frac{a}{2}}{3} + \frac{1.3}{2.4}(l^5-1)\frac{\sin^5\frac{a}{2}}{5} + \ldots\right],$$

(1) Ce théorème a été démontré par Huyghens (*Traité de la lumière*, chapitre VI).

on voit que v augmente en même temps que a, tant que l'angle a est inférieur au double de l'angle *limite*, c'est-à-dire de l'angle dont le sinus est $\frac{1}{l}$.

Quand a est très petit, la série se réduit sensiblement à son premier terme $2(l-1)\sin\frac{a}{2}$, qu'on peut alors remplacer par $(l-1)a$; telle est l'approximation usitée.

2° Si l'on substitue à la déviation minimum v la valeur approchée $v'=(l-1)a$, on trouvera pour l'erreur commise $v-v'$,

$$v-v'=2l\left[\frac{1}{2}(l^2-1)\frac{\sin^3\frac{a}{2}}{3}+\frac{1.3}{2.4}(l^4-1)\frac{\sin^5\frac{a}{2}}{5}+\ldots\right],$$

quantité essentiellement positive, puisqu'on a $l>1$ et $\frac{a}{2}<90°$. On reconnaîtra que cette valeur de $v-v'$ est plus petite que $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{l^3a^3}{4}$.

Dans le cas général où la lumière, traversant le prisme dans une direction quelconque, subit une déviation V plus grande que v, l'erreur $V-v'$ due à l'emploi de v' est toujours moindre que $(\frac{\pi}{2}-1)l^3a^3$.

7. On mènera par les points L et O un plan perpendiculaire aux faces parallèles de la glace. C'est dans ce plan que la lumière se propage en ligne brisée, et le rayon émergent est parallèle au rayon incident. Soit x la distance du point d'incidence à la projection du point L sur la face d'incidence; il

suffit de trouver x. Cette quantité sera déterminée par l'équation

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{l[ac-(a+b)x]}{\sqrt{a^2e^2+[ac-(a+b)x]^2}}.$$

Si $b=0$, c'est-à-dire si le point O est dans le verre, l'équation se réduit à

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{l(c-x)}{\sqrt{e^2+(c-x)^2}},$$

et alors elle fait connaître la marche de la lumière entre deux points situés dans deux milieux différents.

8. Soit E le point d'émergence déterminé par un point I d'incidence; soit p la longueur du rayon incident LI; soit p' la longueur EM du rayon émergent prolongé, c'est-à-dire soit p' la distance du point E d'émergence au point M qui lui correspond sur la *caustique* demandée. On obtiendra l'équation

$$p'=p+\frac{ea^2l^2p}{[(l^2-1)p^2+a^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour le point de rebroussement de la caustique, on aura $p=a$, et $p'=a+\frac{e}{l}$. Ce point serait l'image de L pour un observateur qui regarderait le point L

à travers la glace, et dont l'œil serait situé près de la perpendiculaire menée de L sur les deux faces réfringentes. Il est aisé de trouver ce point de rebroussement par une construction directe.

9. Le point cherché L′ est derrière la face antérieure, sur la perpendiculaire menée aux deux faces par le point L, et la distance de L′ à la face antérieure est $a+\frac{2e}{l}$.

Si l'on imagine que l'épaisseur e de la glace soit doublée, et que la face postérieure actuelle occupe le milieu de l'épaisseur $2e$, si de plus on transporte le point lumineux L du côté de la face nouvelle à une distance a de cette face, le point L′ est (numéro précédent) le point R de rebroussement de la caustique virtuelle formée par des rayons qui émergeraient dans l'air, après être partis du nouveau point L et avoir traversé la glace d'épaisseur $2e$. Il est facile de reconnaître par la géométrie que les points L′ et R doivent en effet coïncider.

Quant aux images L''', L^{v}..... $L^{(2n-1)}$, elles sont toutes situées sur la perpendiculaire LL′, et leurs distances respectives à la face antérieure sont

$$a+\frac{4e}{l},\quad a+\frac{6e}{l},\ \ldots\ldots\ a+\frac{2ne}{l}.$$

On ramènerait de même ces différents cas à ceux où la lumière émanée d'un point traverse, sans se réfléchir, des glaces d'épaisseurs $4e$, $6e$...., $2ne$.

La question qu'on vient de résoudre s'applique également aux glaces nues et aux glaces étamées. Le seul effet du tain est de rendre plus vives les images L''', L^{v}..... et surtout L'.

10. L'image λ est située sur la perpendiculaire menée aux deux faces par le point L; $a+\frac{e}{l}$ est la distance de λ à la face la plus éloignée de L (avant-dernier numéro). Les autres images L^{v}, L^{ix}....., L$^{(2n)}$, se trouvent sur la même perpendiculaire Lλ, et leurs distances à la même face sont respectivement

$$a+\frac{3e}{l},\quad a+\frac{5e}{l},\ \ldots\ldots\ a+\frac{(2n+1)e}{l}.$$

On constaterait comme au numéro précédent que ces questions se ramènent à celles où la lumière émanée d'un point situé dans l'air traverse, sans se réfléchir, des glaces dont les épaisseurs sont $3e$, $5e$....., $(2n+1)e$.

11. Si l'image L' est réelle et située dans l'air, on trouve pour la distance x de L' à la face antérieure :

$$x=\frac{la(r-2e)+2e(r-e)}{l[2(la+e)-r]}.$$

Si l'épaisseur e était comprise entre $\frac{r}{2}$ et r, ou, ce qui revient au même, si la zone réfléchissante était comprise entre 120° et 180°, la valeur de x pourrait

être négative et numériquement plus petite que e, d'où il suivrait que l'image L' se formerait dans le verre. Mais cette valeur négative de x ne donnerait pas la véritable position du point de concours des rayons réfléchis. Car on ne saurait appliquer à ce cas l'équation d'où l'on a tiré x, cette équation supposant que les rayons réfléchis se croisent sur l'axe seulement après avoir émergé du verre. Soit y la distance de la face plane au point intérieur où les rayons réfléchis se coupent réellement, on trouverait

$$y=\frac{la(2e-r)+2e(e-r)}{2(la+e)-r}=-lx.$$

Toutefois les rayons émergents qui parviendraient à un œil placé près de l'axe sembleraient venir d'un autre point situé dans le verre, point qui serait à une distance x de la face antérieure du miroir. Ainsi la valeur négative de x obtenue plus haut ferait connaître la position apparente de l'image de L dans le verre.

On remarquera que le cas dont il s'agit ne peut se présenter pour les miroirs ordinaires, dont la zone n'excède jamais 10° ou 12°.

Si l'on faisait $r=\infty$, il viendrait $x=-a-\frac{2e}{l}$..... (Voyez l'avant-dernier numéro).

12. La relation demandée est

$$\frac{l-1}{lr'+(l-1)e}+\frac{l+1}{lr'+(l+1)e}=\frac{2}{r}.$$

Cette équation, mise sous la forme

$$r = r' + e + \frac{er'}{l^2(r'+e)-e},$$

montre qu'on doit avoir $r > r' + e$. La figure du miroir est donc celle d'un ménisque de divergence.

13. $a = \frac{(r-e)r'}{lr' - (l-1)(r-e)}$.

Cette question se trouve dans le *Traité général de physique* de M. Biot, t. IV, p. 194.

14. 1° Quand le miroir M est un ménisque de convergence ou de divergence, on a la relation

$$\frac{r'+(l-1)a}{lar'+e[r'+(l-1)a]} + \frac{r'+(l-1)a'}{la'r'+e[r'+(l-1)a']} = \frac{2}{r} \ldots\ldots (G).$$

Cette solution générale renferme les solutions des trois problèmes précédents.

Pour le premier (n° 11), il faut poser dans l'équation (G) $r' = \infty$ et $a' = x$.

Pour le second (n° 12), $a = \infty$ et $a' = \frac{r'}{2}$.

Pour le troisième (n° 13), $a = a'$.

2° Quand le miroir est convexe et a la forme d'une lentille biconcave, l'image du point L est située derrière le miroir. a' désignant la distance de cette image virtuelle à la face antérieure, on trouve,

soit directement, soit en modifiant l'équation (G),

$$\frac{r'+(l-1)a}{lar'+e[r'+(l-1)a]}-\frac{r'-(l-1)a'}{la'r'-e[r'-(l-1)a']}=-\frac{2}{r}.$$

15. $r=\frac{2ff'}{f-2f'}$, et $l=\frac{f-f'}{f-2f'}$.

Pour que r soit positif, c'est-à-dire pour que la lentille soit biconvexe, il faut qu'on ait $f>2f'$. Cette condition étant remplie, il en résulte qu'on a $l>1$; ce qui caractérise un milieu plus réfringent que l'air.

16. 1° $l=1+\frac{e^2+h^2}{2ef}$;

2° l est la racine positive de l'équation

$$l^2-\frac{2e\varphi+h^2-3e^2}{2e(\varphi-e)}\,l-\frac{e}{\varphi-e}=0;$$

3° $l=\frac{e}{\varphi+e-f}$.

Ces trois procédés, qu'on vient d'indiquer pour les corps solides, seraient également applicables aux liquides que le contact de l'air n'altère pas. Le liquide serait contenu dans un verre de montre, qu'on fixerait horizontalement et que frapperaient des rayons solaires réfléchis dans une direction verticale. On

sait d'ailleurs qu'il existe d'autres méthodes plus exactes pour déterminer les indices de réfraction.

19. En admettant que l'épaisseur du vase soit très petite et uniforme dans toute son étendue, on peut faire abstraction des parois et supposer que la lumière passe immédiatement de l'eau dans l'air. L'image du cercle lumineux est à peu près un cercle vertical, dont le rayon z est plus grand que h, et dont le centre L' est sur le diamètre horizontal CL. Les plans des deux cercles sont parallèles. Il y a deux cas principaux à examiner :

1° Si le point L est situé plus près de l'œil que le centre C, l'image se forme pour l'observateur en deçà de l'objet, et l'on trouve pour la distance x de l'image L' au point C,

$$x=\frac{ldr}{r+(l-1)d};$$

on a en même temps

$$\frac{z}{h}=\frac{lr}{r+(l-1)d}.$$

2° Si le point L est plus loin de l'œil que le centre C, l'image se produit au delà de l'objet ; il vient

$$(-x)=\frac{ldr}{r-(l-1)d}, \quad \frac{z}{h}=\frac{lr}{r-(l-1)d},$$

expressions qu'on peut déduire des précédentes en changeant d en $-d$. La distance $(-x)$ serait plus grande que r si l'on avait $d > \frac{r}{2l-1}$, ou $d > \frac{3}{5}r$, en faisant $l = \frac{4}{3}$. Cependant il ne faut pas croire que pour $d > \frac{3}{5}r$ l'image soit vue hors de l'eau. Car si l'on considère comme point lumineux l'extrémité A du diamètre CL la plus éloignée de l'œil, ce qui revient à poser $d = r$ dans la valeur de $(-x)$, on trouve que l'image du point A se forme à une distance de C égale à $\frac{lr}{2-l}$, quantité $> \frac{ldr}{r-(l-1)d}$ tant qu'on a $d < r$. L'image de L est donc en avant de celle du point A. L'explication de ces résultats est fort simple : Si l'on conçoit un cône qui ait l'œil pour sommet et qui enveloppe la sphère donnée, et si l'on se figure la courbe de contact de la sphère et du cône, le segment sphérique postérieur à cette courbe n'est visible qu'à cause de la transparence du segment antérieur, et se montre sous une forme agrandie et allongée. La sphéricité du vase étant altérée ainsi par la réfraction, l'image du cercle lumineux ne doit pas sortir de l'image du segment dont il fait partie.

L'expérience vérifie toutes ces indications du calcul.

20. Le foyer F est réel et situé sur le prolongement du diamètre parallèle aux rayons incidents. La plus courte distance du point F à la sphère est égale à $\frac{(2-l)r}{2(l-1)}$.

21. Le point L′ est situé sur le diamètre qui passe par le point L, ou sur le prolongement de ce diamètre. On a

$$\frac{p}{(l-1)p-r}+\frac{p'}{(l-1)p'-r}=\frac{2}{l},$$

relation d'où l'on tire

$$p'=\frac{r(2r+(2-l)p)}{2(l-1)p-(2-l)r}.$$

Dans ces deux équations p' est positif, lorsque le point L′ est au delà de la sphère par rapport au point lumineux, ou autrement, lorsque l'image L′ est réelle.

Soit $p=\infty$; si l'on nomme f la valeur correspondante de p', il vient

$$f=\frac{(2-l)r}{2(l-1)},$$

ce qui est la solution du problème précédent.

22. La question se réduit évidemment à la construction de la caustique formée par l'émergence des rayons qui tombent dans le plan d'un grand cercle mené par le point L.

Soit p la longueur d'un rayon lumineux LI qui vient frapper un point I du cercle réfringent. Soit $2a$ la corde que le rayon incident LI suivrait en se prolongeant. Soit $2b$ la corde IE suivant laquelle se

dirige le rayon réfracté, E désignant le point d'émergence. Enfin soit p' la distance de ce point E au point M qui lui correspond sur la caustique. On aura

$$p' = \frac{a[2a^2 - p(bl - 2a)]}{2p(bl - a) + a(bl - 2a)} \ldots \ldots \text{(C)}.$$

Dans cette équation p' est positif quand le point M est au delà du cercle vu du point L; p' deviendrait négatif s'il fallait porter la longueur EM sur le prolongement virtuel du rayon émergent. Pour une valeur connue de p, a et b sont déterminés par les relations

$$a = \frac{c^2 - p^2}{2p}, \qquad b = \frac{\sqrt{4(l^2-1)p^2r^2 + (c^2-p^2)^2}}{2lp}.$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs dans l'équation (C), on en tire p'. La direction du rayon réfracté IE est facile à tracer lorsqu'on a calculé b. Quant à la direction du rayon émergent EM, elle se déduit fort simplement de l'égalité qui doit exister entre les angles d'émergence et d'incidence.

Pour avoir le point de rebroussement de la caustique, on fera dans l'équation (C) $a = b = r$; il viendra

$$p' = \frac{r[2r + (2 - l)p]}{2(l-1)p - (2-l)r};$$

on retombe ainsi sur la valeur de p' indiquée au numéro précédent, ce qu'on pouvait prévoir; car alors p' et p sont deux distances focales conjuguées.

Il resterait à chercher la forme de la caustique, et à considérer les cas particuliers les plus remarquables, par exemple ceux de $a=0$, de $p'=\infty$, et de $p=\infty$. Ce dernier cas donne lieu à une modification dans l'énoncé du problème.....

23. Il suffit de construire la caustique produite par l'émergence des rayons qui tombent dans un plan quelconque mené par l'axe de la lentille.

Désignons par I le point d'incidence, par E le point d'émergence, et par M le point correspondant de la caustique. Nommons p la longueur LI, et p' la longueur EM. Soit $2a$ la corde que le rayon LI suivrait en se prolongeant dans le cercle dont le diamètre est $2r$; soit $2b$ la corde du même cercle suivant laquelle se dirige le rayon réfracté IE. Soit $2b'$ la corde suivant laquelle le même rayon se dirige dans le cercle dont le diamètre est $2r'$; soit enfin $2a'$ la corde de ce dernier cercle suivant laquelle le rayon EM se prolongerait. On trouvera, en négligeant la longueur IE du rayon réfracté,

$$\frac{a^2}{b^2p}+\frac{a'^2}{b'^2p'}=\frac{bl-a}{b^2}+\frac{b'l-a'}{b'^2} \quad \ldots\ldots \text{(D)}.$$

p' est positif dans cette équation quand le point M est au delà de la lentille vue du point L; p' est négatif quand le point M est sur le prolongement du rayon émergent.

On décrira complétement les deux cercles dont les segments forment par leur réunion le profil de la

lentille. Ayant tracé un rayon LI, on déterminera les directions IE, EM, d'après les lois de la réfraction. Les prolongements des rayons LI, IE, EM, donneront les cordes $2a$, $2b$, $2a'$ et $2b'$, qu'il faudra mesurer avec une règle bien divisée. Les valeurs numériques de a, b, a' et b', introduites dans l'équation (D), feront connaître p'. C'est ainsi qu'on obtiendra chaque point M de la courbe.

Pour le point de rebroussement, on a $b=a=r$, $b'=a'=r'$; l'équation (D) devient

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{l-1}{r}+\frac{l-1}{r'},$$

relation connue, qui lie les deux distances focales conjuguées p et p'.

24. En partant des principes mathématiques de la théorie de l'arc-en-ciel on parvient à l'équation

$$27\,l^4\sin^2\delta=(4-l^2)^3.$$

Cette équation est du sixième degré en l; mais on la ramène à une équation du troisième degré privée de second terme, si l'on pose

$$l^2=x+4-9\sin^2\delta,$$

et si l'on prend x pour inconnue (1).

(1) C'est M. Babinet qui m'a indiqué l'énoncé de ce problème.

25. Pour chaque lumière simple l'aberration longitudinale de sphéricité est la distance du foyer principal au point de rencontre de l'axe avec le rayon émergent extrême. Cette aberration est *totale*, si la lentille est assez épaisse pour que les rayons incidents voisins de ses bords ne puissent émerger. Il est facile de construire géométriquement les aberrations totales a et A pour les lumières rouge et violette. Quant à leurs valeurs algébriques, on obtiendra

$$a=lr\left(\frac{1}{l-1}-\frac{1}{\sqrt{l^2-1}}\right),\quad A=Lr\left(\frac{1}{L-1}-\frac{1}{\sqrt{L^2-1}}\right).$$

Si l'on remplace l par $\frac{1}{m}$, il vient

$$a=\frac{r}{\sqrt{1-m}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-m}}-\frac{1}{\sqrt{1+m}}\right).$$

Il résulte de la forme de cette expression que a diminue en même temps que m; d'où il suit que l'aberration est moindre pour les rayons violets que pour les rouges.

Lorsque la lentille est de crown-glass, $a=1{,}5772r$, et $A=1{,}5173r$; par conséquent $a-A=0{,}0599r$.

Si la lentille est assez mince pour laisser passer tous les rayons incidents, l'aberration longitudinale n'est que *partielle*. Il suffira de calculer cette aberration a' pour les rayons rouges. On trouvera

$$a'=\frac{lr}{l-1}-l\frac{l\sqrt{r^2-h^2}+\sqrt{r^2-l^2h^2}}{l^2-1}.$$

A l'inspection de cette valeur on reconnaît 1° que a' augmente en même temps que h, 2° qu'il faut avoir $\frac{h}{r}<\frac{1}{l}$ ou $=\frac{1}{l}$ pour que les rayons qui tombent sur les bords puissent émerger. a' atteint son maximum quand $\frac{h}{r}=\frac{1}{l}$, c'est-à-dire quand la moitié de l'arc embrassé par la zone postérieure est égale à l'arc qui mesure l'angle *limite*. Dans ce cas

$$a'=lr\left(\frac{1}{l-1}-\frac{1}{\sqrt{l^2-1}}\right)=a;$$

on retombe ainsi sur l'aberration totale a, comme on devait s'y attendre.

27. On trouve $a'=\frac{\lambda-1}{\lambda'-1}a=0,828125a$,

$$a''=\left(\frac{\lambda-1}{\lambda'-1}-\frac{L-l}{L'-l'}\right)a=0,328125a.$$

Il serait aisé de discuter les valeurs algébriques de a' et de a''. Il résulte des données numériques que les angles a et a'' doivent être tournés dans le même sens, et en sens contraire de l'angle a'.

28. Voyez les *Mémoires de l'Académie des sciences* pour l'année 1717; ce problème y est résolu et discuté par Varignon.

29. En admettant que l'image réelle tende à se

produire au centre optique de la lentille, on trouve

$$p = \frac{f + r \pm \sqrt{f^2 + r^2}}{2};$$

la valeur de p qui répond au signe inférieur du radical est celle qui convient à la question; car l'autre valeur, étant plus grande que $\frac{r}{2}$, ne s'accorde pas avec les conséquences de l'énoncé. Pour $f = 20^{pi}$ et $r = 21^{pi}$, il vient $p = 6^{pi}$. La longueur du tuyau est donc réduite à 6^{pi}, tandis que dans le télescope ordinaire elle est égale à $\frac{r}{2}$, ce qui ferait ici $10^{pi},5$.

Si le diamètre du tuyau est de 1^{pi}, on pourra fixer le petit miroir plan ou mieux le ***prisme réflecteur*** à $0^{pi},5$ de l'objectif.

Quant à la valeur de g, on obtient

$$g = \frac{r}{2\varphi}\left(1 + \frac{\varphi}{d}\right)\left(\frac{2f}{f + \sqrt{f^2 + r^2}}\right).$$

Or on sait que

$$G = \frac{r}{2\varphi}\left(1 + \frac{\varphi}{d}\right);$$

on a donc

$$g : G :: 2f : f + \sqrt{f^2 + r^2},$$

et par conséquent $g < G$. Dans notre exemple numérique $g = \frac{40}{49}\,G$.

On sait d'un autre côté que $G' = \frac{f}{\varphi}\left(1 + \frac{\varphi}{d}\right)$; il en résulte

$$g : G' :: r : f + \sqrt{f^2 + r^2},$$

d'où l'on conclut $g < G'$. D'après nos données $g = \frac{3}{7} G'$.

On voit que le pouvoir grossissant du nouveau télescope serait moindre que celui de l'ancien et que celui de la lunette astronomique.

Dans le nouveau télescope comme dans tous les instruments dioptriques, on emploierait avec avantage un objectif achromatique et un oculaire composé.

Cette modification du télescope de Newton a été imaginée par M. Babinet; elle serait applicable aussi aux télescopes de Grégory et de Cassegrain.

30. L'image virtuelle qu'on perçoit serait redressée et rapprochée du miroir, ce qui permettrait d'observer des objets terrestres et de raccourcir le tuyau.

Le grossissement g serait $\frac{r}{2\varphi}\left(1 - \frac{\varphi}{d}\right)$, r désignant le rayon de courbure du miroir, φ la distance focale principale de la lentille biconcave, et d la distance de la vision distincte. Dans le télescope d'Herschel le grossissement G est $\frac{r}{2\varphi}\left(1 + \frac{\varphi}{d}\right)$, si l'oculaire (qu'on suppose simple) a la même distance focale principale φ. On a donc

$$g : G :: 1 - \frac{\varphi}{d} : 1 + \frac{\varphi}{d};$$

d'où l'on déduit $g<G$. Il est évident que g est plus grand pour les presbytes que pour les myopes, tandis que le contraire a lieu pour G.

Le champ c de la vision aurait pour mesure $\frac{2h(d-\varphi)}{rd-\varphi(r-2d)}$, h étant l'ouverture de l'oculaire biconcave. Avec le télescope d'Herschel le champ C de la vision est $\frac{2h(d+\varphi)}{rd+\varphi(r-2d)}$, pour la même ouverture h de l'oculaire biconvexe. Il vient donc

$$c : C :: r(d^2-\varphi^2)+2\varphi^2d-2\varphi d^2 : r(d^2-\varphi^2)+2\varphi^2d+2\varphi d^2.$$

Il est superflu de conclure de là que c est $<C$; car on reconnaît cette inégalité à l'inspection seule des figures des deux instruments.

Il faut remarquer aussi que, pour les mêmes raisons que dans la lunette de Galilée, l'œil ne pourrait profiter de tout le champ c de la vision.

Il existerait donc entre l'ancien télescope et le nouveau les mêmes rapports qu'entre la lunette astronomique et la lunette de Galilée. C'est la comparaison de ces deux derniers instruments qui nous a suggéré l'idée de la modification dont il s'agit ici pour le télescope d'Herschel. D'ailleurs c'est seulement comme exercice d'optique que nous avons proposé cette modification.

31. Si, pour abréger, on pose

$$L+l-2=2a, \quad \text{et } (L-1)(l-1)=b^2,$$

on aura pour la relation demandée,

$$rr'^2-4d(ar+b^2d)r'+4b^2d^2r=0.$$

Quand on connaîtra r, on déduira r' de cette équation, dont les deux racines sont toujours réelles et positives, quels que soient les indices extrêmes de réfraction L et l. C'est la plus petite de ces racines qui convient à la question.

La distance des centres optiques des deux lentilles ou la longueur x du tuyau est égale à

$$\frac{2(L-1)d(r-r')-rr'}{2(L-1)[2(L-1)d-r']}.$$

Il faudra dans cette expression remplacer r' par sa valeur tirée de l'équation précédente.

32. Le point A étant choisi pour *pôle*, et un rayon incident quelconque pour *axe polaire*, soit ρ la longueur d'un autre rayon incident ou *vecteur*, et soit ω l'angle de ce rayon avec le premier. Soit de plus θ l'angle que le rayon vecteur ρ fait avec la tangente à la courbe cherchée; on aura

$$\tan g\theta=\frac{1-l\cos v}{l\sin v}.$$

Comme cet angle est le même pour tous les rayons vecteurs, la courbe est une spirale logarithmique

dont le pôle est le point A et dont l'équation polaire est facile à déterminer.

Si $v=\frac{\pi}{2}$, il vient $\tang\theta=\frac{1}{l}$, et la *courbe polarisante* a pour équation

$$\rho=re^{l\omega},$$

e désignant la base des logarithmes népériens, et r la longueur du rayon incident pris pour axe, longueur qu'on se donne arbitrairement.

Cette solution est plus curieuse qu'utile, à cause de l'extrême difficulté qu'on éprouverait à tailler une substance diaphane de telle sorte qu'elle présentât une surface de révolution engendrée par une portion de spirale logarithmique.

33. 1° Si l'on développe en série la véritable valeur de y, il vient

$$y=\frac{x^2}{2r}+\frac{x^4}{8r^3}+\frac{x^6}{16r^5}+\frac{5x^8}{128r^7}+\dots$$

En se bornant au premier terme $\frac{x^2}{2r}$, on prend pour y une valeur un peu trop faible; mais les fractions qu'on néglige sont presque inappréciables, puisque par hypothèse x est très petit relativement à r.

Soit $a=\text{arc}(\sin=\frac{x}{r})$, c'est-à-dire soit $2a$ la longueur de l'arc que le diamètre de l'anneau soutend dans le cercle dont le rayon est r; on trouve que

l'erreur commise dans cette évaluation de y est moindre que $\frac{a^4}{8r^3}$.

Maintenant lorsqu'on suppose que deux épaisseurs y, y', sont entre elles comme les carrés des rayons x, x', ou des diamètres des anneaux, on commet deux erreurs simultanées qui tendent à se compenser mutuellement. La proportion $y : y' :: x^2 : x'^2$ admise par Newton diffère donc très peu de l'exactitude.

2° Pour que la proportion $y : y' :: x^2 : x'^2$ fût parfaitement exacte, il faudrait que la surface Z fut un paraboloïde de révolution ayant pour sommet le point de contact et pour axe la perpendiculaire menée au plan par ce point. On aurait rigoureusement $y=\frac{x^2}{2r}$, $2r$ étant le paramètre de la parabole génératrice. Or $2r$ serait aussi le diamètre du cercle osculateur au sommet de cette courbe. Si donc on substitue au paraboloïde la sphère engendrée par ce cercle, on retombe sur l'approximation précédente.

34. Soient l_o et l_e les indices des réfractions ordinaire et extraordinaire du spath d'Islande, l'_o et l'_e les indices relatifs au cristal de roche : on trouve

$$\frac{a}{a'}=\frac{m(l'_e-l'_o)}{l_o-l_e}.$$

Si l'on voulait traduire cette expression en nombres, il faudrait poser

$$\begin{cases} l_o=1,654 \\ l_e=1,483 \end{cases} \qquad \begin{cases} l'_e=1,557 \\ l'_o=1,548, \end{cases}$$

ce qui donnerait $\frac{a}{a'} = \frac{m}{19}$.

Une question analogue à celle qu'on vient de résoudre pourrait être proposée sur deux prismes *uni-réfringents* de nature différente : Quel devrait être le rapport approché des angles de ces prismes (l'un, par exemple, de flint-glass et l'autre de crown-glass), pour que la dispersion totale due au premier fût égale à *m* fois la dispersion totale produite par le second ?....

35. Voyez le *Traité général de physique* de M. Biot, t. III, p. 366...371.

APPENDICE.

CHAPITRE Ier.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL EN PHYSIQUE DE 1805 A 1826 (1).

Année 1805.

I. — On a deux baromètres A et B, qui tous les deux sont à $0^m,76$, le thermomètre centigrade indiquant 15°. Dans le baromètre A on introduit une

(1) Depuis 1805 jusqu'à 1826 inclusivement, il n'y eut qu'un seul cours de physique dans les lycées ou colléges royaux; il était suivi par les élèves de mathématiques spéciales.

Les noms des savants qui ont proposé les questions chaque année seront indiqués entre parenthèses à la suite des énoncés. Mais comme ces noms n'arrivent à la connaissance du public que par indiscrétion ou par hasard, il y aura quelques lacunes dans nos indications.

Quant à la correction des copies de physique, elle est

quantité d'air qui fait baisser le mercure à $0^m,70$. Cet air occupe $0^m,14$, le tube du baromètre ayant $0^m,84$ de hauteur. La pression barométrique et la température viennent à varier; le baromètre B marque $0^m,745$ et le thermomètre indique 25°. Quel est alors l'espace qu'occupera l'air dans le baromètre A?

II.—On demande quelle est la force ascensionnelle d'un globe ayant 5^m de rayon, sous une pression de $0^m,76$ et à la température de 15° centésimaux.

Il serait avantageux de connaître, s'il est possible, à une hauteur quelconque dans l'atmosphère, la force ascensionnelle, en supposant la pression barométrique et la température connues à cette hauteur.

(M. Biot.)

Année 1806.

Connaissant ce qu'un corps d'un volume et d'une densité inconnus perd de son poids dans deux flui-

confiée à une commission qui varie d'une année à une autre. Par exemple, les juges de ce concours furent

en 1809 MM. Gay-Lussac, Biot et Pictet;

en 1810 MM. Lefebvre-Gineau, de Jussieu et Gay-Lussac;

en 1818 MM. G. Cuvier, Thénard, Poisson et Biot.

Aujourd'hui les savants qui font ordinairement partie de cette commission sont MM. Pouillet, Demontferrand, Lamé, Beudant, Péclet.....

Chacun appréciera les garanties de lumières et d'impartialité que de tels noms présentent pour la correction des copies.

des dont les densités sont connues, trouver ce qu'il perdrait de son poids dans un fluide formé par le mélange de deux parties du premier et de trois parties du second (1), en supposant que le volume des fluides n'augmente ni ne diminue quand on les mêle.

(M. FRANCOEUR.)

Année 1807.

Donner la théorie de la bouteille de Leyde.

Année 1808.

Exposer la théorie du miroir plan.

Année 1809.

Exposer les effets de la bouteille de Leyde et de l'électrophore, et en donner l'explication.

Année 1810.

Expliquer le phénomène produit par l'instrument électrique appelé *bouteille de Leyde*. On fera voir

(1) Le mot *parties* est amphibologique, parce qu'on ne voit pas s'il s'agit de *poids* ou de *volumes*. Lorsqu'une semblable équivoque se présente, il faut que l'élève saisisse les deux interprétations dont l'énoncé est susceptible, et qu'il donne successivement deux solutions, dont chacune soit appropriée à l'un des deux sens du texte.

comment s'exercent les actions électriques qui conduisent la bouteille par degrés jusqu'au terme où elle est chargée à saturation.

On supposera que la décharge s'opère soit par des contacts alternatifs, soit d'une manière subite, et l'on exposera les effets qui ont lieu dans l'un et l'autre cas.

Année 1811.

Exposer le fait principal d'où dérivent tous les phénomènes produits par l'électricité galvanique, et déduire de ce fait l'état électrique de la pile de Volta, soit lorsqu'elle se trouve isolée, soit lorsqu'elle se trouve en communication par le haut ou par le bas avec le sol.

(Haüy.)

Année 1812.

Exposer la loi à laquelle est soumise la réfraction de la lumière. Donner une idée de la manière dont Newton la fait dépendre de l'attraction que les corps exercent sur les rayons lumineux, attraction qui ne commence à être sensible qu'à une très petite distance (1).

(Haüy.)

(1) On conçoit que la question ait été posée de cette manière à une époque où le *système de l'émission* dominait. Aujourd'hui si l'on proposait d'expliquer la réfraction, l'ex-

Année 1813.

Exposer les lois de la transmission du calorique par communication immédiate et par rayonnement, modifiées par la propriété conductrice des substances et par les propriétés réfléchissantes et absorbantes des surfaces (1).

(HALLÉ.)

Année 1814.

Théorie de la pompe foulante et aspirante.

Après avoir expliqué la construction des pompes aspirante, et aspirante et foulante, et la cause et les progrès de l'ascension de l'eau à chaque coup de

plication qu'on en demanderait serait sans doute fondée sur le *système des ondes*. Mais il vaudrait mieux se borner à demander l'exposition des lois du phénomène et des procédés de mesure qui lui sont applicables, indépendamment de toute hypothèse. C'est ce que Dulong a fait en 1830 (voyez plus loin). Cette remarque s'étend à la question de 1811. Il serait peu philosophique de vouloir imposer à des étudiants une *théorie* de la pile de Volta, dans un temps où cette partie de la physique est en travail, et où les physiciens les plus distingués sont partagés sur la question de savoir si l'électricité de la pile est due au contact des métaux, ou si elle est produite par des actions chimiques.

(1) Relativement à la seconde partie de cette question, consultez une *note* récente de M. Melloni intitulée : *De la prétendue influence que les aspérités et le poli des surfaces exercent sur le pouvoir émissif des corps* (*Institut* du 9 août 1838).

piston, on examinera lequel des deux est le plus avantageux de placer la soupape ou en bas du tuyau d'aspiration, ou bien à la jonction de ce tuyau avec le corps de pompe.

On fera voir dans quel cas l'eau peut s'arrêter dans le tuyau d'aspiration ou dans le corps de pompe, quoique le piston, lorsqu'il est au point le plus bas de sa course, ne soit pas à 32 pieds de hauteur au dessus du niveau de l'eau qu'il faut élever (1).

(Lefebvre-Gineau.)

Année 1816 (2).

Théorie et construction des aréomètres.

Cette théorie doit embrasser

1° Les aréomètres à volume constant, tant pour les solides que pour les liquides;

2° Les aréomètres à volume variable, devant donner *immédiatement* les densités des liquides au dessus et au dessous de celle de l'eau;

3° Leur graduation par l'emploi de l'eau pure et de la balance (3);

4° La graduation par les mêmes moyens d'un aréomètre dont l'échelle ne pourrait pas commencer

(1) Voyez le *Traité de mécanique* de M. Francœur, 5e édition; et le *Traité des machines* de Hachette.

(2) Il n'y a pas eu de concours en 1815, année de funeste mémoire, où la France fut envahie par l'étranger.

(3) Voyez la *Physique* de M. Despretz, 4e édit., n° 258.

à 1000 (densité de l'eau), mais seulement au dessus ou au dessous de ce nombre;

5° Les corrections à faire pour obtenir rigoureusement la densité d'un corps solide, lorsqu'on opère dans l'air.

(M. Gay-Lussac.)

Année 1817.

Construction et théorie du baromètre. Application de cet instrument à la mesure des hauteurs dans l'atmosphère. Dans la mesure des hauteurs on n'aura égard qu'à la correction de la température de l'air, que l'on suppose décroître en progression arithmétique de bas en haut.

(M. Gay-Lussac.)

Année 1818.

I. — Théorie de la rosée.

Cette théorie doit embrasser les principales circonstances qui influent sur la formation de la rosée, telles que le calme de l'air, sa transparence, son humidité, la nature des surfaces exposées à la rosée, l'étendue du ciel visible de ces surfaces. On donnera aussi l'explication des abris dont se servent les jardiniers pour défendre les plantes de la gelée, et celle de la formation de la glace à la surface de la terre, quoique la température de l'air ne descende pas jusqu'au terme de la congélation de l'eau.

II. — Expliquer les effets des miroirs sphériques concaves et convexes.

(M. GAY-LUSSAC.)

Année. 1819.

Premier sujet de composition (1).

Un fil cylindrique de fer doux, d'une grande longueur comparativement à son diamètre, par exemple de $0^{m},5$ sur $0^{m},001$, est placé dans une petite chape de papier que l'on suspend à un point fixe par le moyen d'un assemblage de fils de soie sans torsion. A côté de ce fil et dans le même plan horizontal, mais un peu plus au nord, on en suspend un autre aussi de fer doux, et d'une longueur à peu près égale, que l'on place toutefois à une distance telle qu'il ne puisse venir toucher l'autre, c'est-à-dire telle que la distance de leurs centres excède la demi-somme de leurs longueurs. On recouvre ces

(1) Il peut arriver qu'un sujet de composition soit refusé par le président et les surveillants du concours, soit parce qu'il est hors du programme des connaissances exigées, soit parce qu'on l'a déjà traité dans un concours précédent. (Toutefois ce dernier motif de refus n'est plus admis aujourd'hui, du moins en physique.) Il peut arriver aussi qu'une première composition soit annulée, par suite de réclamations ultérieures auxquelles elle donne lieu. Telles sont les causes de la pluralité des sujets proposés quelquefois la même année. Nous avons cru devoir faire mention de ces particularités pour nos lecteurs de province.

deux fils et leur suspension avec une cloche de verre qui les met à l'abri des agitations de l'air extérieur, et on les laisse se diriger librement autour de leurs points de suspension.

Cela posé, on demande de répondre aux questions suivantes :

1° Les fils prendront-ils une situation déterminée, ou resteront-ils indifférents à toutes les situations?

2° S'ils prennent une direction, quelle sera la cause qui les y contraindra, et quelles sont les forces que cette cause excitera dans chacun des deux fils?

3° Comment ces forces, si elles se développent, agiront-elles sur les fils pour les faire tourner dans le plan horizontal où ils sont suspendus?

4° Si les fils se fixent d'eux-mêmes à une certaine position d'équilibre, cette position ne dépendra-t-elle pas de la situation relative que l'on aura donnée à leurs centres?

Dans tout ce qui précède on suppose que les fils n'aient reçu préalablement aucune aimantation artificielle, et l'on ne demande que d'analyser les forces qui pourront se développer en eux sans en donner la mesure. Si l'on trouve que ces forces peuvent imprimer un déplacement à leurs centres de gravité, on en fera abstraction, et l'on considérera chaque fil de suspension comme invariablement fixé à une même verticale et passant par le milieu du fil métallique qu'il est employé à soutenir.

Maintenant supposons que les fils, au lieu d'être de fer doux, soient formés d'acier trempé et qu'ils

aient été préalablement aimantés par la méthode de la double touche. Alors les deux extrémités posséderont des quantités égales de magnétisme libre, et à cause de la grande longueur qu'on suppose aux fils, leurs fluides magnétiques contraires seront répartis vers les deux extrémités de chaque fil sur une étendue de 4 à 5 centimètres. Si donc on suppose la distance des centres de suspension des fils suffisamment grande, par exemple égale à 4 ou 5 fois leur longueur, on pourra calculer les actions réciproques des deux fils comme émanant pour chacun d'eux de deux points ou *pôles* situés à environ 1 ou 2 centimètres de leurs extrémités. Enfin, pour simplifier le problème, nous supposerons un des fils absolument fixe, et nous le placerons hors du méridien magnétique de l'autre fil, parallèlement à ce plan, mais assez au nord ou assez au sud pour que les pôles les plus éloignés des deux fils n'aient plus qu'une influence presque insensible, et qu'ainsi on puisse dans la détermination de leur équilibre se borner à considérer l'action réciproque des pôles les plus voisins, lesquels seront supposés de nature contraire.

Cela posé, on demande:

1° Quelle sera la position d'équilibre où le fil mobile se fixera.

2° Si la direction du méridien magnétique vient à varier, la position du fil mobile n'éprouvera-t-elle pas des changements, et quels sont-ils?

3° Cette disposition d'appareil n'offre-t-elle pas

un moyen d'agrandir l'amplitude des variations diurnes, c'est-à-dire des déviations que les aiguilles aimantées présentent en vertu des petits déplacements diurnes que le méridien magnétique éprouve dans chaque lieu?

4° Quel changement arriverait dans le phénomène, si les deux fils étaient mobiles autour de leurs centres de suspension.

La première partie du problème, où l'on considère des fils de fer doux et non aimantés, n'exige qu'une discussion raisonnée des forces, sans aucun calcul mathématique. On ne demande pas de déterminer l'angle précis sous lequel les fils se fixeront.

La seconde partie, où l'on considère des fils d'acier aimantés, admet le calcul et peut conduire à des formules qui indiquent la position absolue des fils pour tous les cas, soit que l'un des deux ait été fixé, soit qu'ils aient été tous les deux rendus mobiles.

Les candidats devront donc s'exercer d'abord sur la première question, puis sur la deuxième et successivement sur les diverses particularités de celle-ci qu'ils pourront résoudre. La solution complète de ces questions n'est pas toutefois exigée; mais le travail de chaque candidat obtiendra d'autant plus de droits qu'il aura plus approché de ce but (1).

(M. Biot.)

(1) Les questions principales que renferme ce long énoncé ont été résolues par M. Biot dans un mémoire intitulé : *Sur*

Deuxième sujet de composition.

Exposer les expériences qui prouvent l'existence de l'action magnétique exercée par le globe terrestre, et qui peuvent servir à en déterminer les lois.

(M. Biot.)

Troisième sujet de composition.

Exposer la théorie de l'évaporation, dire en quoi elle diffère de la *vaporisation* (1), en quoi elle dé-

les diverses amplitudes d'excursion que les variations diurnes peuvent acquérir quand on les observe dans un système de corps aimantés réagissant les uns sur les autres (*Annales de chimie et de physique*, t. XXIV, p. 140).

(1) Si la nouvelle édition du *Dictionnaire de l'Académie* avait été déjà publiée en 1819, et qu'on eût permis aux concurrents de la consulter pour établir la distinction dont il s'agit, ils seraient tombés dans un grand embarras ; car ils y auraient trouvé :

VAPORISATION. *s. f.* Passage d'une substance de l'état liquide à celui de vapeur.

ÉVAPORATION. *s. f.* Vaporisation; dissipation plus ou moins lente des parties d'un liquide par l'action du feu, du soleil, de l'air, etc.

Ce Dictionnaire, présenté récemment comme l'inventaire complet de la langue française, telle qu'elle est aujourd'hui, est-il au courant des termes scientifiques, ou est-il sur ce point en retard d'un demi-siècle? C'est une question que nous n'avons pas à résoudre. Quoi qu'il en soit, voici la dis-

pend de la température; comment se forment les nuages, les brouillards; pourquoi ils nous paraissent opaques, quoique l'eau liquide et la vapeur de l'eau soient parfaitement transparentes; ce qu'on sait des causes de la formation de la pluie; quels sont les vents qui déterminent ordinairement la pluie, et ceux qui donnent un temps serein; ce qu'on sait des causes de cette différence.

Exposer la théorie de la formation de la rosée, et décrire les phénomènes qui l'accompagnent; dire pourquoi elle n'est pas précédée, comme la pluie, d'une opacité dans l'atmosphère semblable aux nuages et aux brouillards; quelle est sur sa formation l'influence de la température tant de l'atmosphère que du corps sur le quel elle se dépose; quelle est celle du rayonnement du calorique de ce corps, et par conséquent celle de l'étendue plus ou moins grande de la partie libre du ciel; pourquoi il ne peut y avoir de rosée, comme de gelée blanche, que par un temps serein.

(Ampère.)

Année 1820.

I. — Donner la théorie de l'hygrométrie.

tinction très lucide qu'Ampère faisait entre le mot *évaporation* et celui de *vaporisation* :

L'*évaporation* est la production lente de vapeurs qui a lieu à la surface d'un liquide à une température plus basse que celle de l'ébullition.

La *vaporisation* est la production rapide de vapeurs qui a lieu dans toute la masse d'un liquide bouillant.

Cette théorie doit comprendre :

1° L'exposition des principes sur lesquels est fondée l'hygrométrie ;

2° La description de l'hygromètre à cheveu ;

3° L'évaluation de ses degrés en eau ;

4° La détermination de la quantité d'eau contenue dans un certain volume d'air à une température donnée, soit lorsqu'il est entièrement saturé, soit lorsqu'il ne l'est que partiellement ;

5° La description de l'hygromètre de Leroy, connu aussi sous le nom d'hygromètre de Dalton ou d'hygromètre par refroidissement, et la manière de s'en servir ;

6° La détermination de la quantité absolue d'eau qui peut exister dans l'atmosphère, en supposant que l'air n'oppose aucun obstacle à la diffusion de la vapeur aqueuse.

II. — Expliquer le phénomène de l'arc-en-ciel et les diverses circonstances qu'il présente, son apparence circulaire, sa position relativement au soleil et à l'œil de l'observateur, son immobilité tandis que les gouttes d'eau tombent avec une vitesse déterminée, la largeur des bandes colorées, la plus ou moins grande intensité des couleurs, l'ordre suivant lequel elles sont placées tant dans le premier que dans le second arc-en-ciel, et la position de celui-ci relativement au premier.

III. — Donner la théorie du développement de l'électricité par influence, et l'appliquer à celle du condensateur et de l'électrophore.

(M. Gay-Lussac.)

Année 1821.

Ayant mesuré exactement la capacité du cylindre d'une machine à vapeur, et l'ayant fait communiquer avec un manomètre et un thermomètre afin de connaître à chaque instant la force élastique de la vapeur et sa température, on a fait jouer la machine pendant un certain nombre de coups, que l'on a comptés. La vapeur chassée du cylindre par le piston a été condensée et recueillie dans une cuve en bois exactement fermée, où l'on avait introduit préalablement une certaine masse d'eau froide dont le poids et la température étaient connus. A la fin de l'expérience on a pesé de nouveau cette eau pour connaître le poids de toute la vapeur qui s'y était liquéfiée, et l'on a aussi déterminé sa température, que la vapeur avait élevée en se liquéfiant. On a obtenu ainsi le tableau suivant, où les poids sont exprimés en kilogrammes, les volumes en décimètres cubes, les températures en degrés du thermomètre centésimal, et les forces élastiques par les hauteurs des colonnes de mercure que la vapeur a soutenues dans le manomètre ou baromètre intérieur. Les hauteurs elles-mêmes sont exprimées en millimètres.

Poids initial de l'eau contenue dans la cuve.	Température initiale de cette eau.	Augmentation de poids opérée par la liquéfaction de la vapeur.	Température de la masse totale de l'eau à la fin de l'expérience.	Force élastique de la vapeur en entrant dans le condenseur.	Température de la vapeur au même instant.	Volume total de la vapeur liquéfiée.
k.	°	k.	°	mm.	°	dc.
327,324	7,59	9,184	24,45	1016	109,44	11086,790
327,438	8,89	9,070	26,81	2032	132,22	5325,929
327,438	8,89	8,821	26,53	3048	146,11	3558,314

Avec ces données (1) on demande de résoudre les questions suivantes :

(1) Les élasticités de la vapeur qui correspondent aux températures observées paraissent trop faibles, comme on va le reconnaître. Partons de la formule (L) [n° 37 de la *première partie*], qui représente fidèlement les observations si précises de MM. Dulong et Arago. Ecrivons-la sous la forme

$$\log z = \log 760 + \frac{5,247t}{348,23+t},$$

z désignant l'élasticité exprimée en millimètres de mercure pris à la température de la glace fondante. Faisons successivement

$$t=9,44, \qquad t=32,22, \qquad t=46,11,$$

il vient

$$z=1045,44, \qquad z=2114,35, \qquad z=3121,35,$$

nombres plus grands que ceux qui sont rapportés dans la 5ᵉ colonne du tableau.

1° Trouver quelle a été dans chacune des expériences l'expansion de volume opérée par la vaporisation, c'est-à-dire déterminer le nombre de centimètres cubes qu'un centimètre cube d'eau supposé pris à la température du maximum de densité a remplis en passant à l'état de vapeur.

2° Comparer les densités successives de la vapeur dans les trois expériences avec les forces élastiques qu'elle a exercées, et en déduire les relations des densités aux forces élastiques, si toutefois les expériences indiquent une loi simple entre ces deux éléments.

3° Déduire de ces expériences les quantités relatives de calorique que la vapeur a abandonnées en se liquéfiant, c'est-à-dire déterminer le nombre de grammes d'eau qu'un gramme de vapeur pourrait échauffer d'un degré en se liquéfiant à chacune des températures auxquelles les expériences successives ont été faites.

4° Enfin comparer d'après les résultats les quantités de calorique nécessaires pour vaporiser un gramme d'eau dans les diverses circonstances où les expériences ont eu lieu, et en déduire la solution de cette question (1) importante pour les arts qui emploient la vapeur comme force motrice :

Y a-t-il de l'économie à employer la vapeur aqueuse à de hautes températures, plutôt que de la

(1) Consultez sur ce point le *Précis de physique* de M. Biot, t. II, p. 698, 3e édition.

faire agir au degré ordinaire de l'ébullition à l'air libre sous la pression de $0^m,76$, et où la chaleur de liquéfaction est comme 520° ou 530° (1)?

(M. Biot.)

Année 1822 (2).

I. — Deux boules de verre A et B sont réunies par un tube cylindrique courbé à angles droits, comme l'indique la figure 27. Elles contiennent toutes les deux de l'air atmosphérique et de l'eau plus que suffisante pour que la vapeur de ce liquide atteigne son maximum de densité à la plus haute température que l'on ait à considérer. (Le volume de ce liquide est d'ailleurs négligeable.) Les deux masses d'air sont séparées par une colonne de mercure hh' contenue dans le tube horizontal DE.

Cela posé, on connaît

1° Les volumes occupés par l'air dans les deux parties A et B à une température connue et donnée t,

2° La force élastique du mélange d'air et de vapeur d'eau dans chacun des vases à la même température t,

(1) Ce serait plutôt 530° ou 540°. Voyez la *Physique* de M. Despretz, n° 184, 4e édition.

(2) Depuis 1822 jusqu'en 1837 inclusivement, c'est M. Dulong qui a proposé toutes les questions de physique du concours.

3° Le diamètre du tube horizontal, supposé constant,

4° La densité de l'air atmosphérique sec à la température de 0° et à la pression de 0m,76,

5° La tension de la vapeur d'eau pour toutes les températures.

On demande de déterminer

Les densités du mélange de gaz et de vapeur dans chacun des deux vases, lorsque la température de B aura été élevée de *t* à T et celle de A abaissée de *t* à *t'*, ces variations étant comprises dans des limites telles que la colonne de mercure reste toujours entièrement contenue dans le tube horizontal.

On devra trouver l'équation dont la résolution donnerait la valeur générale de la quantité cherchée. Mais on n'exige le calcul complet que pour le cas particulier dont voici les données :

Volume de A, y compris la capacité du tube jusqu'en *h*	$5^{cmc},4$;
Volume de B jusqu'en *h'*	$6^{cmc},5$;
Diamètre du tube horizontal	$1^{mm},3$;
Température initiale commune à tout le système	15°,5;
Température à laquelle on élève la partie B	21°,2;
Température à laquelle on abaisse A . .	10°,8;
Force élastique commune aux deux mélanges d'air et de vapeur à la température de 15°,5	0^{m}, 761;

Tension de la vapeur d'eau à 15°,5 . . . 0^m,0132;
idem . . . . à 10°,8 . . . . 0^m,0099;
idem . . . . à 21°,2 . . . . 0^m,0185;
Densité de l'air sec à 0° et à 0^m,760 . . . $\frac{1}{773}$.

II. — Exposer les méthodes d'observation et de calcul qu'on devrait employer pour obtenir la pesanteur spécifique d'un liquide d'après les indications d'un aréomètre à poids constant, tel que ceux dont on fait usage dans les arts. La tige de cet instrument supposée cylindrique est divisée arbitrairement en parties égales. On n'a à sa disposition aucun liquide d'une pesanteur spécifique connue. On possède seulement une balance, des poids et de l'eau pure.

Année 1823.

I. — Un tube cylindrique de verre A (fig. 28) est rempli d'air sec, et immergé dans un liquide dont la température mesurée sur un thermomètre à mercure est de 318°,11. Un petit tube vertical B, soudé au premier, reste pendant toute la durée de l'expérience à la température de 18°,84, qui est aussi celle de l'air. On fait plonger l'extrémité de ce tube B dans un bain de mercure, et, lorsque tout l'appareil s'est mis en équilibre de température avec le milieu ambiant, on mesure la hauteur de la colonne de mercure soulevée dans le tube B.

On demande de calculer d'après cette observation la température qui aurait été indiquée au moment du maximum par un thermomètre à air placé à côté

du tube A, cette indication étant supposée corrigée de la dilatation du corps qui servirait d'enveloppe à l'air.

Voici les données nécessaires pour résoudre la question (1):

Longueur du tube A.	0^m,62;
Diamètre intérieur.	0^m,02;
Longueur du tube B.	0^m,57;
Diamètre intérieur.	0^m,0016;
Dépression capillaire du mercure dans le tube B	0^m,0045;
Hauteur du baromètre au moment où l'on a placé le bain de mercure. . .	0^m,7603;
Hauteur de la colonne de mercure soulevée	0^m,2318;
Hauteur du baromètre au moment de cette observation.	0^m,7615;
Température constante de l'air	18°,84;
Température du liquide chaud évaluée sur le thermomètre à mercure . . .	318°,11;
Dilatation moyenne du verre en longueur pour un degré du thermomètre à mercure.	$\frac{1}{98700}$

II. — Exposer les méthodes d'observation qui devraient être employées pour parvenir à connaître la distribution de l'électricité à la surface d'un ellipsoïde de révolution conducteur et isolé.

(1) Voyez les traités de physique, et le *Journal de l'école polytechnique*, t. XI, p. 200.

III. — Un objet linéaire de 5 centimètres étant placé sur l'axe principal d'un miroir sphérique concave dont le rayon égale 36^{cm} et perpendiculairement à cet axe à une distance de 76^{cm} comptée depuis la surface du miroir, on demande

1° A quelle distance de ce miroir il faudra placer un écran pour obtenir une image nette de cet objet;

2° Si cette image sera droite ou renversée;

3° Quelle sera sa longueur.

Année 1824.

I. — Exposer la théorie de l'hygrométrie.

II. — Résoudre le problème suivant :

On a un baromètre à siphon CBA (fig. 29) ouvert en A et fermé en C. A la température 0° le niveau du mercure s'élève en N dans la branche ouverte et en M dans la branche fermée.

La température s'étant élevée d'un nombre donné de degrés sans que la pression atmosphérique ait changé, on a observé que le niveau du mercure s'est abaissé d'une quantité connue MM' dans la branche fermée et s'est élevé de la même quantité dans la branche ouverte. Cet effet est attribué à la dilatation d'une certaine quantité d'air resté dans l'espace CM.

On demande de déterminer la tension de cet air d'après l'abaissement du mercure comparé à la hauteur primitive. Les élèves, après avoir donné la formule relative à ce problème, devront en faire l'application à des nombres qu'ils choisiront eux-mêmes.

Année 1825.

Premier sujet de composition.

I.—Une lunette astronomique étant donnée, faire voir que son pouvoir grossissant est égal au diamètre de l'objectif divisé par le diamètre du cercle lumineux placé en arrière de l'oculaire.

II. — Expliquer les effets de la combinaison de deux miroirs réflecteurs pour l'expérience de Pictet, quand on fait usage de glace.

Deuxième sujet de composition.

I. — Décrire les circonstances favorables ou contraires à la formation de la rosée, et donner la théorie complète de toutes les modifications dont ce météore est susceptible.

II. — Indiquer les méthodes expérimentales qui devraient être mises en usage pour déterminer le rapport des pouvoirs émissifs de deux substances.

Année 1826.

Exposer les méthodes d'observation et de calcul qui peuvent faire connaître

1° Le poids spécifique des gaz permanents parfaitement secs ou saturés,

2° La densité des vapeurs.

CHAPITRE II.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL EN PHYSIQUE ÉLÉMENTAIRE DE 1827 A 1838 (1).

Année 1827.

I. — Décrire les expériences à l'aide desquelles on peut prouver que pour un même lieu de l'atmosphère la pression de l'air est la même dans tous les sens.

II. — Indiquer le genre d'appareils que l'on pourrait employer pour faire écouler un gaz avec une vitesse constante (2).

Année 1828.

I. — Faire l'énumération détaillée des circonstan-

(1) Ce cours de physique, qui date de l'année scolaire (1826-1827), est suivi par les élèves de mathématiques élémentaires et de philosophie. Le programme de ce cours comprend les connaissances de physique exigées pour le baccalauréat ès sciences.

(2) Ces appareils sont décrits dans les traités de physique sous le nom de *gazomètres*.

ces dans lesquelles il se produit de la chaleur ou du froid.

II. — Par quel genre d'expériences peut-on constater que la température du maximum de densité de l'eau est supérieure au terme de la congélation, et quelles seraient les meilleures méthodes pour mesurer avec précision cette température (1)?

Année 1829.

Décrire les procédés qu'il faut mettre en pratique pour déterminer la pesanteur spécifique des corps liquides et solides.

Année 1830.

Exposer les méthodes d'observation propres à la détermination des chaleurs spécifiques des corps solides, liquides et gazeux.

Année 1831.

I. — Prouver par le raisonnement et par l'expérience qu'un corps plongé dans un liquide est sollicité de bas en haut par une force verticale égale au poids du volume de liquide déplacé.

Ce principe est-il applicable aux corps plongés dans les fluides élastiques?

Si l'on suppose qu'un ballon ordinaire formé par une masse de gaz hydrogène renfermée dans une

(1) Consultez le *Traité de physique* de M. Despretz, 4e édition, et un *Mémoire* publié par Hallstrom dans les *Annales de chimie et de physique*, t. XXVIII.

enveloppe flexible soit en équilibre dans l'atmosphère à une distance plus ou moins grande de la terre, qu'arrivera-t-il si l'on fait sortir de l'enveloppe une faible partie du gaz qu'elle contient, par exemple un centième?

II. — Si l'on n'avait qu'un thermomètre à sa disposition, que faudrait-il faire pour déduire des indications de cet instrument la pression de l'atmosphère dans le lieu de l'observation?

III. — Tout le monde sait qu'en dirigeant sur la main l'air que l'on expire, on peut, suivant la grandeur de l'ouverture de la bouche et la rapidité du courant, éprouver une sensation de chaleur ou de froid. On demande l'explication détaillée de ce phénomène.

Année 1832.

I. — Deux miroirs concaves de métal étant situés vis-à-vis l'un de l'autre de manière que leurs axes principaux se trouvent sur une même ligne droite, si l'on place un petit vase de métal poli plus froid que les corps environnants au foyer de l'un, et au foyer de l'autre un thermomètre, on observe sur cet instrument un abaissement de température plus grand que celui qui aurait lieu sans le concours des miroirs. Le refroidissement est encore plus prononcé lorsque la surface extérieure du vase froid est recouverte de noir de fumée. On demande l'explication de ces phénomènes (1).

(1) *Traité de physique* de M. Lamé, t. I, nos 252 et 253.

II.—Expliquer le mécanisme du siphon, et indiquer les dispositions accessoires de cet appareil qui s'opposeraient aux variations de vitesse de la veine fluide pendant toute la durée de l'écoulement (1).

Année 1833.

Faire connaître les divers modes d'expérience ou d'observation (2) qui peuvent être employés pour déterminer la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'air atmosphérique.

Année 1834.

I. — Décrire les expériences qui peuvent servir à manifester la compressibilité des liquides, et les appareils à l'aide desquels on peut obtenir les évalua-

(1) Pour le moyen d'obtenir un écoulement uniforme avec le siphon, consultez les *Traités de physique* de MM. Lamé et Péclet.

(2) Très souvent les mots *expérience* et *observation* sont employés indifféremment l'un pour l'autre. Quelquefois on fait entre ces deux mots la distinction que voici : L'*observation* consiste à examiner les phénomènes tels qu'ils se présentent dans la nature. L'*expérience* consiste à étudier isolément certaines particularités d'un phénomène, et à les reproduire par des essais dont on éloigne toute cause de complication. Par exemple, l'*observation* des effets de la foudre a conduit les physiciens à des *expériences* qui ont montré que chacun de ces effets est produit par l'électricité.

tions les plus exactes des coefficients de compressibilité (1).

II. — Comment pourrait-on déterminer la pesanteurs pécifique d'un liquide avec un de ces aréomètres à poids constant répandus dans le commerce, et qui portent, comme l'on sait, une graduation arbitraire?

Année 1835.

I. — Exposer la théorie de la rosée (2).

II. — La soupape fixe d'une pompe aspirante étant placée à 8^{m} au dessus de la surface de l'eau, et le piston, dont la course est de 0^{m},20, restant au point le plus bas à 0^{m},08 de la soupape fixe, on demande à quelle hauteur l'eau pourra s'élever dans le tuyau d'aspiration.

III. — Quelle est l'origine présumable de l'électricité atmosphérique (3)?

(1) Ces appareils sont décrits dans les traités de physique sous le nom de *piézomètres*. On pent aussi consulter à ce sujet un *Mémoire* de MM. Colladon et Sturm (*Annales de chimie et de physique*, t. XXXVI).

(2) La théorie que Wells a donnée de ce phénomène est développée avec beaucoup d'étendue et de clarté dans une *notice* de M. Arago snr le *rayonnement nocturne* (*Annuaire* de 1828). Voyez aussi les objections faites contre cette théorie par M. Van Roosbroeck, qui nie, d'après ses propres observations, que les corps se refroidissent avant de se recouvrir de rosée, et qni attribue la précipitation de la vapeur aqueuse à une aspiration que l'air atmosphérique éprouverait de bas en haut (*Institut* du 23 novembre 1836).

(3) Voyez les *Eléments de physique* de M. Pouillet.

Année 1836.

I. — Quels sont les phénomènes que présente la lumière solaire en traversant un milieu diaphane terminé par des surfaces non parallèles?

Discuter les expériences qui ont été faites pour découvrir la cause de la diversité des couleurs qu'elle affecte.

II.—Quels seraient les instruments les plus propres à faire connaître un *maximum* ou un *minimum* de température, sans être obligé de l'observer au moment où il s'établit?

Année 1837.

Premier sujet de composition (1).

I. — Décrire les divers procédés qui pourraient être employés avec succès pour déterminer la densité d'une vapeur.

II.—Indiquer et expliquer les variations de température que l'on peut observer dans un vase vide lorsqu'on y fait arriver séparément par un orifice d'une grandeur convenable de l'air atmosphérique, du gaz hydrogène ou du gaz carbonique.

III. — Comment pourrait-on mesurer avec précision le volume d'un corps de forme irrégulière, sous

(1) Les professeurs chargés de surveiller le concours rejetèrent ce premier sujet à cause de la seconde question, qui leur parut dépasser les limites du programme.

la condition d'éviter tout contact de ce corps avec un liquide quelconque (1)?

Deuxième sujet de composition.

I. — Décrire les procédés les plus exacts pour déterminer les coefficients de dilatation des solides et des liquides.

II.—Etant donné un tube gradué en parties d'égale capacité, comment calculerait-on le diamètre du réservoir sphérique qu'il faudrait souder à ce tube pour en faire un thermomètre capable de marquer des températures distantes de 45 degrés centigrades (2)?

Année 1838 (3).

I. — Exposer la théorie de la machine pneumatique et celle de la machine de compression.

II. — Décrire la construction des thermomètres à liquides et à gaz.

(M. Péclet.)

(1) La méthode imaginée par Say pour résoudre ce problème est indiquée dans la *Physique* de M. Péclet, t. I, n° 318, 3e édition.

(2) Voyez la *Physique* de M. Lamé, t. I, n° 154.

(3) M. Dulong, qui avait proposé toutes les questions de physique de 1822 à 1837, est mort cette année, par une triste fatalité, le jour même du concours en physique (19 juillet 1838). Qu'il nons soit permis de nous associer ici aux regrets universels qu'excite la perte prématurée de ce physicien célèbre, de cet homme si droit et si désintéressé, dans lequel on admirait, suivant l'expression d'un poète,

L'accord d'un beau talent et d'un beau caractère.

CHAPITRE III.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL EN PHYSIQUE SPÉCIALE DE 1827 A 1838 (1).

Année 1827.

1° Exposer la théorie de la pile voltaïque isolée, l'électricité étant supposée en équilibre. 2° Indiquer les moyens de vérifier par l'observation les résultats de cette théorie. 3° Décrire les principaux effets que l'on peut produire à l'aide de cet instrument. 4° Faire l'énumération des circonstances qui en modifient les divers genres d'action.

Année 1828.

I. — Dans un ballon d'une capacité inconnue, renfermant de l'air atmosphérique à la température T,

(1) Ce cours de physique est suivi par les élèves de mathématiques spéciales. Le programme de ce cours n'est pas encore arrêté. C'est une omission que nous signalons à l'autorité universitaire.

et dont l'élasticité P′ est peu inférieure à la pression P de l'atmosphère, on laisse entrer par un large robinet la quantité d'air extérieur nécessaire pour que l'élévation de température qui résulte de cette introduction communique au fluide intérieur une élasticité égale à celle de l'atmosphère. A l'instant même où cette condition est remplie, et avant qu'aucune portion de chaleur n'ait été absorbée par les parois du vase, on ferme le robinet. Lorsque la température de l'air contenu dans le ballon est redevenue T comme elle était avant l'expérience, l'élasticité du gaz intérieur est P″.

On demande de déterminer d'après ces données seules le rapport de la chaleur spécifique de l'air soumis à une pression constante à la chaleur spécifique du même fluide sous un volume constant (1).

II. — Après avoir appliqué sur toute la surface extérieure de la boule d'un thermomètre une couche mince d'une substance A, on trouve que pour un

(1) L'énoncé de cette importante question est dû à Laplace, qui l'a résolue dans la *Mécanique céleste*, livre XII, p. 125, en se servant du calcul différentiel. Dulong a trouvé ensuite une solution élémentaire de la même question (voyez la *Physique* de M. Lamé, t. I, p. 500). L'expérience qui est décrite dans le texte, et qui sert à traduire en nombres la formule obtenue par Laplace, a été faite en 1811 par MM. Clément et Desormes. Voici les données de cette expérience :

$T = 12°,5$; $P = 766^{mm},50$; $P' = 752^{mm},69$; $P'' = 762^{mm},889$.

certain excès de température il perd 3°,06 pendant l'unité de temps en se refroidissant constamment avec la même rapidité dans l'air atmosphérique. On le recouvre ensuite d'une couche d'une autre substance B, et l'on reconnaît que dans les conditions précédentes il perdrait 5°,57. Sachant d'ailleurs que les pouvoirs émissifs de A et de B sont dans le rapport de 1 à 5,7, on demande quel est le refroidissement produit par le contact de l'air dans les deux expériences pendant le même temps (1).

Année 1829.

I. — Faire connaître les diverses circonstances dans lesquelles la lumière se polarise, et les propriétés qui distinguent la lumière polarisée.

II. — Etant donné 1° la pesanteur spécifique d d'un gaz permanent et celle de la vapeur d'eau δ rapportées à l'air atmosphérique, 2° le poids π d'un mélange de ce gaz et de vapeur d'eau soumis à une pression totale p et à une température t, 3° enfin la force élastique f de la vapeur, on demande de déterminer d'après ces éléments seuls le poids de la vapeur contenue dans le mélange.

(1) *Annales de chimie et de physique*, t. VII, p. 356, *Mémoire* de Dulong et Petit *sur les lois du refroidissement*. L'excès de température dont il s'agit ici était de 100°, la minute était prise pour unité de temps, A était de l'argent, et B était le verre lui-même.

Année 1830.

Exposer 1° les lois de la réfraction que subit un rayon lumineux en traversant deux milieux superposés et non cristallisés, 2° les meilleurs moyens de déterminer le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour les substances solides, liquides ou gazeuses.

Année 1831.

I. — Comment à l'aide de l'expérience ou d'un instrument peut-on parvenir à connaître le mécanisme de la production du son dans les instruments à vent?

II.—Etant donné un pendule formé par une mince tige de verre portant à son extrémité inférieure un vase cylindrique de même nature, comment devrait-on calculer la hauteur de la colonne de mercure qu'il faudrait placer dans le vase pour que ce pendule fût à peu près compensé (1)?

Année 1832.

I. — Exposer le mode d'action du magnétisme terrestre sur des fils métalliques traversés dans toute

(1) Ce pendule *compensé* est celui de Graham. Les calculs présentés à ce sujet dans plusieurs *Traités de physique* ne sont pas tout à fait exacts. On trouvera dans la *Physique* de M. Biot, t. I, p. 169, la véritable formule qui donne la compensation demandée.

leur longueur par un courant voltaïque et pouvant tourner librement autour d'un axe vertical, le fil mobile étant supposé 1° rectiligne et vertical, 2° rectiligne, horizontal et terminé par une de ses extrémités à l'axe de rotation, 3° circulaire, le plan du cercle étant vertical et l'axe de mouvement passant par le centre du cercle.

II. — Si l'on possédait une table, pour toutes les températures initiales de $-20°$ à $+40°$, des plus grands abaissements de température que peut produire l'évaporation de l'eau dans l'air atmosphérique parfaitement desséché (1), que faudrait-il faire pour

(1) La table dont il s'agit a été construite par M. Gay-Lussac pour des températures comprises entre 0° et 25°, et pour de l'air soumis à la pression de 76cm. On pourrait prolonger cette table jusqu'à $-20°$ et $+40°$ à l'aide de la formule empirique suivante, que j'ai calculée d'après les expériences de M. Gay-Lussac :

$$\log T = \log 5{,}82 + \frac{1{,}6256\,t}{75{,}93+t} \quad \ldots\ldots \text{(L)}.$$

T désigne l'abaissement de température produit par l'évaporation de l'eau dans de l'air sec dont la température initiale est t, et dont l'élasticité est de 76cm. Voici les couples d'observations qui ont servi à déterminer les constantes :

$$\begin{cases} t=0 \\ T=5{,}82 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=12 \\ T=9{,}70 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=24 \\ T=14{,}30. \end{cases}$$

Si l'on fait successivement $t=0, 1, 2, 3 \ldots\ldots, 24, 25$, que l'on tire de (L) les valeurs correspondantes de T et qu'on les compare aux valeurs observées, on trouvera que *l'écart*

connaître le degré hygrométrique de l'air dans lequel on aurait observé le maximum de froid que l'évaporation de l'eau peut y maintenir?

Année 1833.

I. — Quels sont les meilleurs moyens d'observation pour déterminer l'inclinaison de l'aiguille aimantée?

II. — Comment pourrait-on trouver le rapport des intensités du magnétisme terrestre sur deux points du globe très distants l'un de l'autre?

III. — Comment pourrait-on déterminer le rapport des intensités de la lumière du soleil et de celle d'une flamme artificielle?

Année 1834.

Exposer la théorie des principaux phénomènes capillaires, et décrire les expériences qui pourraient servir à la vérifier.

Parmi les phénomènes dont on donnera l'explication, l'on devra comprendre celui de l'élévation de l'eau dans un tube vertical d'un diamètre plus

moyen de (L) est de 0°,031, et que son *écart maximum* est seulement de 0°,065. La grande exactitude de (L) entre 0° et 25° promettrait une exactitude suffisante à une certaine distance hors de ces limites. On pourrait donc étendre approximativement l'usage de la formule jusqu'à — 20° et + 40°, et compléter ainsi la table connue.

grand dans le bas que dans le haut, tel que celui qui est représenté fig. 30 (1).

Année 1835.

I. — Exposer les méthodes expérimentales propres à faire connaître les pouvoirs absorbants des corps solides pour la chaleur rayonnante, et montre comment on pourrait vérifier s'ils sont *égaux* aux pouvoirs émissifs.

II. — Comment pourrait-on prédire la teinte et l'intensité de la couleur que manifesterait le mélange, en proportions connues, de deux ou d'un plus grand nombre des couleurs élémentaires du spectre solaire (2) ?

III. — Un morceau de cuivre dont la pesanteur spécifique était 8,8529 a été soumis, par toute sa surface extérieure, à une compression instantanée, après laquelle sa densité s'est trouvée de 8,8898. Cette compression a produit une élévation de 10,62 degrés centésimaux (3). On demande de calculer, d'après ces résultats, le rapport des deux chaleurs

(1) Voyez la *Physique* de M. Péclet, t. I, n°. 221.

(2) Newton a donné pour cela une construction empirique dont M. Biot a développé les conséquences par le calcul (*Traité général de physique*, t. III, p. 450). M. Biot a vérifié l'exactitude de cette construction par diverses épreuves (t. IV du même *Traité*).

(3) Ces expériences sont dues à Berthollet. Voyez la *Théorie mathématique de la chaleur* de M. Poisson, p. 529, *note première*.

spécifiques du cuivre à pression constante et à volume constant (1).

Année 1836.

I. — Faire connaître les moyens déjà employés et ceux que l'état de la science peut suggérer pour mesurer les températures les plus élevées. Les causes d'erreur particulières à chaque procédé devront être signalées et appréciées (2).

(1) Ce problème est analogue à l'un de ceux qui ont été proposés en 1828 (voyez plus haut). Pour obtenir en nombres le rapport demandé, il faut connaître le coefficient de la dilatation cubique du cuivre, qui est égal à $\frac{1}{19400}$. Les élèves remarqueront que dans plusieurs problèmes du concours certaines données manquent, tandis que dans quelques autres il y a des données superflues. M. Dulong croyait devoir poser ainsi les questions, afin qu'il y eût plus de difficulté et plus de mérite à les résoudre.

(2) Il fallait décrire le thermomètre à air, la méthode pyrométrique d'immersion et le pyromètre de Borda. Depuis cette époque, MM. Cagniard-Latour et Demontferrand ont imaginé un pyromètre *acoustique*, et M. Pouillet a proposé un pyromètre *magnétique* (Journal *l'Institut*, numéro du 4 janvier 1837).

Il ne sera pas inutile de donner ici une formule empirique très simple que j'ai calculée pour le pyromètre de Borda, et qui suppose l'assemblage d'une règle de cuivre avec une règle de platine :

$$t = \frac{128040z}{1+81,4z} \quad \text{. . . . . (H).}$$

t est la température que marquerait un thermomètre à air ;

2° Quels sont les procédés les plus exacts pour déterminer le nombre de vibrations par seconde correspondant à un son appréciable et constant (1)?

Année 1837.

I. — Indiquer les circonstances dans lesquelles on peut observer les anneaux colorés de Newton; ex-

z est l'excès de la dilatation linéaire du cuivre sur celle du platine depuis 0° jusqu'à $t°$, ces dilatations se rapportant à l'unité de longueur. Les constantes ont été déterminées par les couples d'observations

$$\begin{cases} t=100, \\ z=\frac{1}{1199}, \end{cases} \qquad \begin{cases} t=300, \\ z=\frac{1}{345,4}. \end{cases}$$

Quand on aura mesuré z, on en déduira t par le moyen de l'équation (H). Cette formule, que l'analogie rend admissible de 100° à 400° environ, servirait à diminuer l'incertitude des indications du pyromètre de Borda.

(1) On doit observer que la sirène, la roue dentée et la méthode des battements, donnent immédiatement le nombre des vibrations *complètes* ou *doubles*, c'est-à-dire composées d'une allée et d'un retour, tandis que n désigne le nombre des vibrations *simples* dans la formule

$$n=\sqrt{\frac{gP}{lp}},$$

où g est la pesanteur, l la longueur d'une corde vibrante, p son poids, et P le poids qui la tend. Cette remarque importante est omise dans plusieurs *Traités de physique*.

poser les lois expérimentales de ce genre de phénomène, et les relations numériques qui le rattachent à d'autres propriétés de la lumière.

II. — Exposer les méthodes expérimentales qui conduiraient aux déterminations les plus exactes de l'intensité du magnétisme terrestre en divers lieux du globe, et pour le même lieu à des époques séparées par un long intervalle (1).

Année 1838.

I. — Exposer la théorie de l'équilibre des liquides dans les tubes capillaires (2).

(1) Pour comparer les intensités du magnétisme terrestre dans le même lieu à des époques différentes, il existe deux méthodes imaginées, l'une par M. Poisson et l'autre par M. Arago. Voyez les *Traités de Physique* de MM. Despretz et Péclet.

(2) Parmi les questions du concours on a dû en remarquer plusieurs qui appartiennent à l'*hydrostatique*, mais aucune qui se rapporte à la *statique* proprement dite. Toutefois les problèmes de statique ne sont pas exclus du concours ; mais c'est en mathématiques seulement qu'on peut en proposer, puisque ce sont les professeurs de mathématiques spéciales qui sont chargés d'enseigner cette partie de la mécanique. Voici deux problèmes de statique qui ont été proposés à la classe de mathématiques spéciales, le premier en 1833 et le second en 1836. On nous saura gré sans doute de rapporter ces énoncés, qui intéressent les physiciens aussi bien que les géomètres.

Couper un triangle par une sécante, de manière que le

II. — Faire connaître la construction et l'usage de la boussole d'inclinaison.

(M. Péclet).

rapport des deux parties soit égal à un nombre donné, et de manière que les centres de gravité des deux parties se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de section. (Voyez, dans la *Mécanique* de M. Poisson, t. II, nos 607 et 608, les conditions d'équilibre relatives à la flottaison d'un prisme droit et triangulaire dont les arètes sont horizontales).

Un point O *situé dans le plan d'un triangle* ABC (fig. 31) *est attiré par les trois sommets* A, B, C. *Les trois forces sont entre elles comme les distances respectives* AO, BO, CO. *On demande en quel point du triangle ce point* O *doit être placé pour demeurer en équilibre.* (Voyez le 3e chapitre de la *Statique* de M. Poinsot.)

CHAPITRE IV.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL EN CHIMIE DE 1831 A 1838 (1).

Année 1831.

Propriétés chimiques de l'eau.
Comment obtenir les éléments de l'eau séparés?

(1) Le cours de chimie, qui date de l'année scolaire 1830-1831, est snivi par les élèves de seconde. Le programme de ce cours renferme les notions de chimie exigées pour le baccalauréat ès sciences.

Les questions de chimie ont été proposées jusqu'à ce jour par M. Thénard, hors celle de 1836, qui a été donnée, dit-on, par M. Orfila. La commission chargée de la correction des copies se compose ordinairement de MM. Thénard, Dumas, Pelouze, Guérin-Varry..... (M. Thénard n'a pas fait partie de cette commission en 1836.) Les noms qu'on vient de lire font assez voir que les questions de chimie doivent être aussi bien choisies que celles de physique, et que les copies ne pourraient être soumises à des juges plus compétents.

Analyse et synthèse de l'eau.

Année 1832.

1° Préparation et théorie de la préparation du chlore.

2° Quelles sont les principales propriétés physiques et chimiques du chlore? Développer son action sur l'hydrogène et les substances hydrogénées, telles que l'eau, l'ammoniaque, les matières colorantes, les miasmes putrides. Faire connaître, d'une manière générale au moins, celle qu'il exerce sur les métaux et leurs oxides.

3° Comment s'assurer que le chlore est pur?

Année 1833.

1° Comment se forme l'acide nitrique dans la nature?

2° Comment se le procure-t-on?

3° Quelles sont ses propriétés caractéristiques?

4° Quelle est la composition de la poudre à canon, et la théorie de sa détonation (1)?

Année 1834.

1° Comment se procure-t-on le gaz oxigène, et comment reconnaît-on qu'il est pur?

(1) Voyez dans les *Annales de chimie et de physique*, t. LXII, p. 250, l'analyse d'un *Mémoire* de M. Piobert *sur les effets de la poudre*.

2° Quels sont les corps simples avec lesquels il peut se combiner, et quels sont les principaux phénomènes qui accompagnent la combinaison ?

3° Décrire les composés qu'il forme avec le carbone; exposer surtout la préparation de ces composés, leurs propriétés caractéristiques et les procédés par lesquels on les analyse.

4° Lorsque deux oxides métalliques contiennent le même métal, et que tous deux peuvent s'unir aux acides, quelles sont les quantités relatives d'acide qu'ils exigent pour former deux sels au même état de saturation?

Année 1835.

1° Qu'est-ce qu'un métal? Combien existe-t-il de métaux? Quels sont les métaux utiles?

2° Quelle est l'action générale du gaz oxigène, de l'air, de l'eau, sur les métaux?

3° Extraction du potassium.

Préparation et principales propriétés de l'hydrate de potasse et du chlorate de potasse.

Année 1836.

1° Comment se procure-t-on le gaz hydrogène, et comment reconnaît-t-on qu'il est pur?

2° Quels sont les corps simples avec lesquels il peut se combiner, et quels sont les principaux phénomènes qui accompagnent sa combinaison avec le chlore?

3° Décrire les composés qu'il forme avec le soufre;

exposer surtout la préparation de l'acide sulfhydrique, ses propriétés caractéristiques et les procédés par lesquels on l'analyse.

4° Quelle est l'action de l'acide sulfhydrique sur les dissolutions salines de zinc, de manganèse, de fer, d'antimoine, d'étain et de mercure, et sur l'acide arsénieux dissous? Exposer la théorie de cette action lorsque les métaux sont précipités à l'état de sulfures.

Année 1837.

Qu'est-ce qu'un acide? Qu'est-ce qu'une base salifiable?

A quels caractères reconnait-on la force d'un acide et d'une base?

Quels sont les principaux acides et quelles sont les principales bases, inorganiques?

Comment se procure-t-on l'ammoniaque à l'état de gaz et à l'état liquide (1)?

Quelles sont les principales propriétés de l'ammoniaque?

Déterminer la nature et les quantités des principes de cet alcali.

(1) Ici l'expression d'*état liquide* est équivoque. S'agit-il de l'ammoniaque dissoute dans l'eau, ou de l'ammoniaque pure liquéfiée par la pression et par le refroidissement? Au sujet de cette incertitude voyez plus haut la *note* relative à la question de physique de 1806.

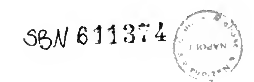
Année 1838.

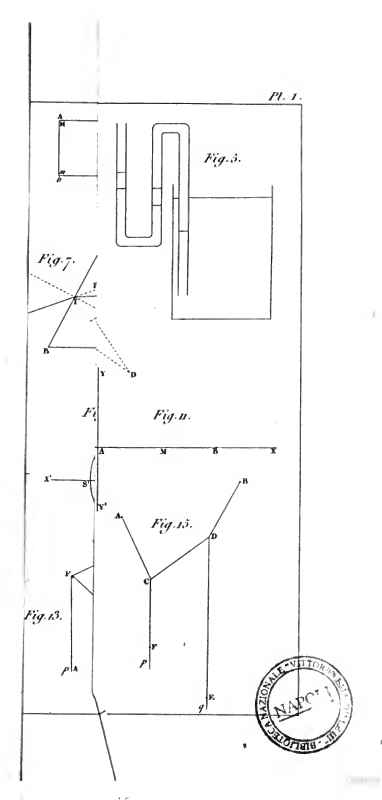
Sur quoi la lampe de sûreté est-elle fondée? La décrire, ses usages (1).

Qu'est-ce qu'un équivalent chimique? Comment les détermine-t-on? En faire quelques applications.

Prouver que dans les sels de même genre et au même état de saturation les quantités d'acides sont proportionnelles à la quantité d'oxigène des bases.

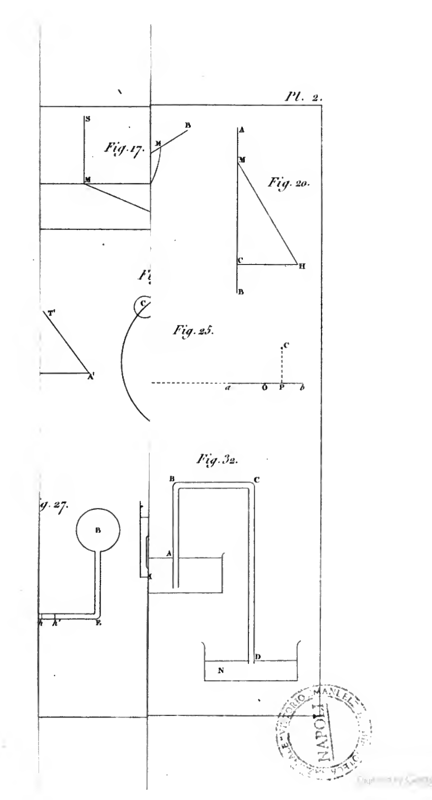
(1) Voyez dans l'*Institut* du 30 novembre 1836 des observations de M. Ch. Combes sur la lampe de sûreté due à Davy et sur les perfectionnements dont elle est susceptible.





Pl. 1.
A
M
m
b
Fig. 5.
Fig. 7.
I
B
D
Y
Fig. 11.
A
M
B
X
X'
S'
Y'
A
Fig. 15.
B
D
C
F
p
q
E
F
Fig. 13.
p
A




Pl. 2.
Fig. 17.
S
M
M
B
Fig. 20.
A
M
C
H
B
C
T'
A'
Fig. 25.
C
a
O
P
b
Fig. 32.
B
C
A
D
N
g. 27.
B
h
h'
E

